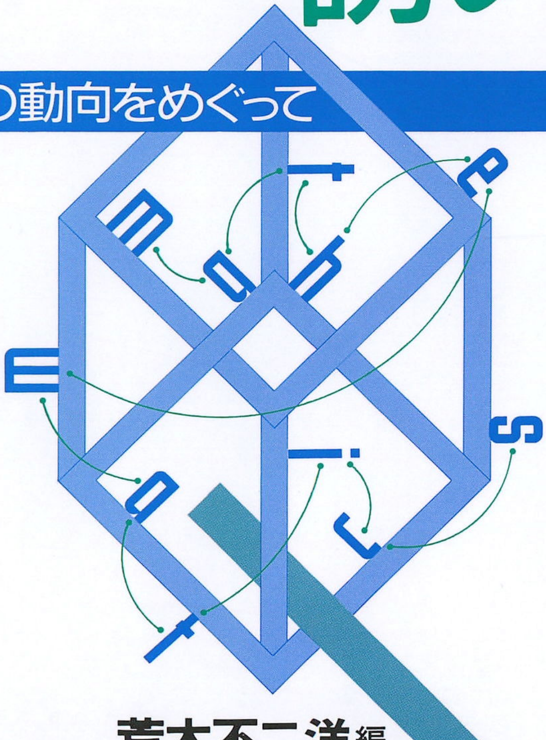
数理物理への誘い2

最新の動向をめぐって

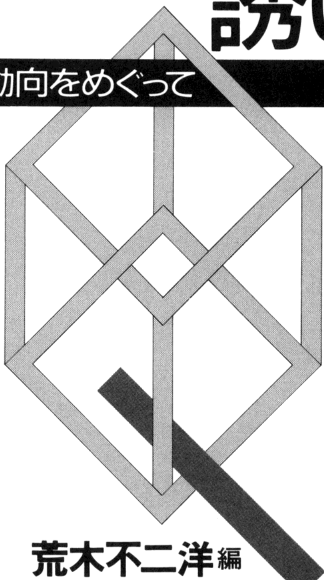


荒木不二洋 編

[発行] 遊星社

数理物理への誘い2

最新の動向をめぐって



荒木不二洋 編

遊星社

目　次

装丁＝海保 透

はじめに

物理学の理論的な構築には，数学的な議論，すなわち数理が，さまざまな側面で重要な意味をもちます．まず，物理学の基本概念はしばしば数学的な基本概念でこれを正確に表現できます．典型的な例として，ニュートン力学の基本法則の中心的な概念である速度や加速度が，微分という数学的基本概念で表現されました．大学生のとき受けた熱力学の授業で，温度の概念を説明するのに，接触して熱エネルギーのやり取りが起こらないもの相互を同値とみなしたときの同値類と定義されて，ひとつの感動を覚えた記憶があります．ゲージ場という考え方も，電磁気学以来，物理的に基本的な概念ですが，本書で数学者の著者によって取り上げられているように，数学的な基本概念でもあります．

もちろん，物理学でたぶんいちばん目につく数学的な議論あるいは数理は，いろいろな計算とか数理的導出です．力学の場合，運動の法則は微分方程式の形に表現され，それを解いて実際の運動を求めるのには，積分論，あるいは微分方程式論が数理的方法を与えます．そしてそのような力学系の運動を長時間追って眺めると，ある場合には本書で取り上げられているカオスに行き当たったりします．そして，物理的現象やあるいはその説明や解法として用いられる数理の背後には，数学的な基本定理がかくれています．上に例として取り上げたニュートン力学についても，今や常識になってしまいましたが，当時としては画期的な基本定理として，不定積分の導関数がもとの関数になるという微分と積分の相互関係があるのです．

他方，数学はしばしば論理と同一視されがちですが，数学の研究は数理現

象の研究といういわば実験科学的側面が重要な役割を果たし，ポアンカレが論じているように，数学の研究の決定的瞬間は，論理ではなくインスピレーションによってもたらされます．理論物理学は数理現象の宝庫であり，そのようなインスピレーションの材料にめぐまれています．

このように，数理的思考により物理学の深い理論が構成され，同時に物理学の要請あるいは刺激により数学的理論が発展する，というような数学と物理学の交流の場が数理物理学です．それはニュートンの時代からあったわけですが，今世紀前半にはそれぞれ独立に大きな発展を遂げ，それが比較的最近になって密接な交流を始めたという意味では若い学問ということもできます．そして今や著しい発展を遂げつつあります．

その急激な発展のためもあって，未だ十分によく知られていないこの数理物理学を，広い範囲の方々に伝えたいという思いから，学習院大学を会場として10年前からサマー・スクール「数理物理・・」を学習院大学の江沢洋教授と共同で企画・開催してきました．1回目の1987年のものが「数理物理87」，昨1996年のものが「数理物理96」で，「数理物理00」も間近になりました．

このサマー・スクール（ただし9月に行なうことが多い）では，大学院生や講演主題の非専門家である研究者を対象として，講演主題の面白さがわかるような平易な解説を，講師の方々にお願いしてきました．講義の内容は予め予稿として書いていただき，それを集めた『予稿集』を会の始めに参加者に配布しました．これをそのままにしておくのは大変もったいないので，この「数理物理への誘い」のシリーズとして編集することになりました．今回の執筆にあたっても，各先生方には『予稿集』にお書きいただいた予稿をもとにして，平易さをモットーとして，何を言いたかったかそのエッセンスとモチーフを，一般向けにできるだけやさしくお話しふうにお書きいただき，さらにその後の発展にも触れていただくようお願いしました．

本書の各話題は各著者に独立にお書きいただいたもので，どこからでも興

味に応じて読んでいただくことができます．しかし，内容的にはほぼ三つのグループに分けることができます．

第１話のフラクタルと第２話のカオスは，ともに従来の 数学＝規則性 の常識を破る数理現象で，最近研究が著しく発展し，現在も発展している話題です．フラクタルは，興味深い図が示すように，不規則ではあるが，日本の伝統的な自然回帰の美にもつながるような何かの規則性を秘めたものです．まだ未解決の問題に満ちた発展中の分野ですが，秘められた規則性の探索は宝探しの面白さがあります．カオスの方は，ニュートン力学を解くような完全に決定論的なシステムに，これもまた図で示されるような混沌とした複雑さを秘めています．

二番目のグループは，幾何学と一般相対性理論に関係する話題です．その最初の第３話はゲージ場を，数学的な側面から解説したものです．電磁場のポテンシャルはゲージ場の最初の例ですが，物理ではそれがヤン－ミルズ場に一般化されました．他方数学では，微分多様体のベクトル束の概念が展開されました．数学と物理におけるこのような独立な理論が，実は本質的に同じものでした．この第３話では，この話題を複素構造や複素ベクトル束のモジュライ空間という観点から解説します．そういうと難しそうに聞こえますが，話は平行四辺形の相似の話から始まります．

このグループの二番目となる第４話は，アインシュタインが考えた一般相対論の重力場のような曲がった時空の計量の幾何学的な研究です．ここでは物理に起源をもつ重力場のインスタントンが話題になるとともに，数学として有名なカラビ予想などが解説されます．

以上の二話が数学者による数学の解説でしたが，このグループの三番目となる第５話は，物理学者による量子重力と弦理論の解説です．その議論の道具は経路積分です．物理では数学的にまったく整備されていない範囲にまで経

路積分を使って結論を導きます．これは発見的手法とよばれます．それが数学的に重要な産物を生み出すことは，フィールズ賞受賞者のウィッテンが示したところです．

最後の三番目のグループは，量子力学の波動関数の位相因子に関するもので，第６話では exp($i\gamma$) と書かれています．これが空間のトポロジー（位相）と結びつくところが愉快です．第６話はその一般論と具体例の明快な解説です．その最後の例として取り上げられているアハラノフ‐ボーム効果を主題にしたのが第７話です．この効果は，古典力学の常識を破る量子力学特有の現象として有名であり，外村博士の精密磁場測定技術によるその精密測定は国際的に有名ですが，ここではその数学的理論が解説されます．

サマー・スクール「数理物理・・」の講師の方々は，第一線の研究者として多忙であり，執筆していただけないものも多いのですが，３年前に江沢洋教授編集のものが出版され，ここに第２編を編集できることになりました．これもひとえに本書の企画に賛同して多忙な中から時間を割いて原稿を寄せていただいた先生方のおかげであり，心から感謝の意を表したいと思います．また本書の完成のため努力してくださった遊星社の西原昌幸さんに感謝します．

1997年１月

荒木不二洋

第1話

フラクタル・パターン形成の物理

松下　貢

1°　はじめに

私たちは結晶中の原子や分子の配列のような並進対称性や回転対称性をもったパターンを見ると科学的に美しいと感じる．しかし，それはこれまでの科学がそのようなケースしか扱ってこなかったせいではないだろうか．実際，立場を変えて，芸術の世界では対称的なパターンを見ると全く退屈に感じるではないか．

自然界には，なじみ深い並進対称性も回転対称性もすぐには見当たらないために，一見しただけでは規則性があるようにはとても思えない，またそのためにこれまで科学の対象にはなり得なかったパターンが数多く見られる．山並みや空に浮かぶ雲，稲妻，海岸線や，河川網，地面や岩石などのひび，割れ目や破断面，すすや綿ぼこりなど，それらの例はさまざまで枚挙にいとまがない．実際，普通に目にする自然界のパターンの大部分はランダムであって，面角一定の法則に従う規則的な美の典型例である水晶でさえ私たち素人が探してもそうたやすく見つかるものではない．しかし，ランダムとはいっても，山並みは単なる雑音曲線とは明らかに区別がつくし，河川網は鉄道網とは異質である．ということは，自然界に見られるパターンはランダムさの中にも何かある自然法則に支配された規則性を秘めており，科学的にも美しいとは考えられないだろうか．

上に挙げた例だけでなく，自然界に見られる多くのランダム・パターンは大小さまざまのスケールをもつ部分から構成されているように見える．マン

デルブロは早くからこのことに気づき，一見して何の変哲もないようなランダム・パターンにも単純で美しい対称性（膨張収縮対称性あるいはスケール不変性）が隠されていることが多いことを主張してきた．そして1970年代中頃にフラクタルという新しい概念を導入してこれらの統一的記述を試みたのである．その後，フラクタルは技術的・博物学的な段階から脱皮して，フラクタル・パターンがなぜ，どのように形成されるかが議論されるようになった．そして1980年代になると概念的にも拡張整備され，フラクタル科学として飛躍的に発展してきた．現在ではフラクタルは科学・工学の非常に多くの分野で議論されるようになっており，カオスとともに科学の重要なパラダイムの一つと見てよいであろう．

ここではフラクタル・パターン形成の物理の観点から，まず凝集現象に注目する．こういった具体例から出発して関連したいろいろな現象を紹介するとともに，問題を抽象化・一般化して多くの興味深い数理物理的な話題を紹介する．この分野の新しさを反映してか，現時点ではほとんどすべて現象論の範囲内でしか議論されておらず，解析的な理論が皆無に近いことを予めお断りしておく．その意味で本稿は他の稿と多少異質であり，見方を変えると未解決の数理物理的な問題の宝庫ともいえる．

2° 凝集現象

ちょっと前に掃除したはずの部屋の隅の綿ぼこりがいつのまにか大きくなっていて，また掃除をしなければならないことに気づく．これは誰もが日常生活で経験していることであろう．このように，小さな粒子が凝集，付着して大きなクラスターに成長する現象は結晶成長，泥の堆積をはじめとして，自然界にはあまねく見られる．それだけでなく，この凝集現象は科学・技術の多くの分野，たとえばエアロゾル科学，コロイド科学，高分子科学，材料工学，免疫学などに現れる最も普遍的な現象の一つである．ここ15年ほどにわ

たる“成長するランダム・パターン（growing random patterns）”に関するモデルの提唱とその計算機シミュレーション，理論的・実験的研究の爆発的発展の中で，最も詳しく研究されたのはこの“凝集”であった．これは一つには上述のように現象の普遍性による．しかし理由はそれだけではない．凝集過程がしばしば，煙突のすす（炭素微粒子の集まり）に見られるように，ランダムで複雑な凝集体を生み出すことはよく知られていた．それがフラクタルによって結構よく記述できることがわかってきたのである．

2.1　凝集現象の分類とモデル

ここでは簡単のために，凝集体（クラスター）が同一の単純な単位粒子から構成される場合だけを考える．このように限定しても凝集現象は依然として多様なので，まず凝集過程の分類を試みる．第一に，凝集するものの凝集直前の形態（粒子そのものが凝集するのか，あるいはすでに粒子が凝集してできたクラスターが動き回って凝集するのか）や，それら粒子，クラスターの運動様式（ブラウン運動かあるいは直線的（バリスティック）な運動か）によって分類できる．つぎに，凝集の際の律速過程は何か（拡散律速か，反応律速か）によっても分類できる．以上の分類法を組み合わせると，多様な凝集現象も以下のように系統的に分類されるのである．

A．粒子凝集

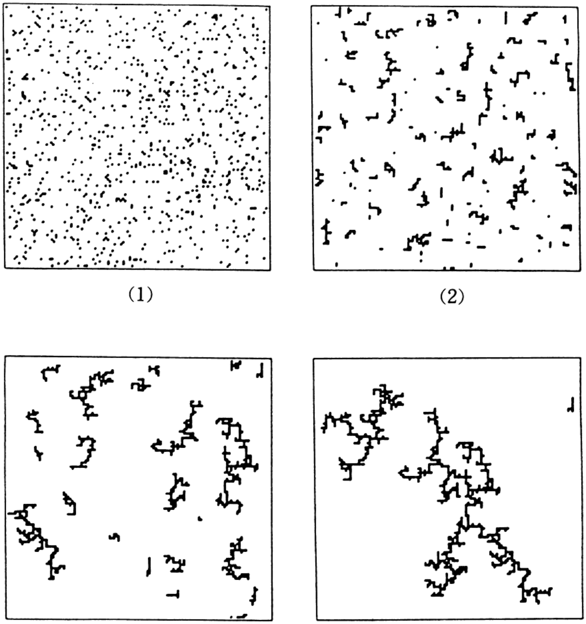
個々の粒子が動き回って不動のクラスターに凝集付着してそのクラスターが成長する．これは律速過程などにより次のように細分される．(1) 拡散律速型粒子凝集：いわゆるDLA（diffusion-limited aggregation；拡散に支配された凝集）がその代表例である（図5参照）．これは低粒子濃度の極限でのモデルであり，誘電破壊，樹枝状結晶成長など種々のランダム・パターン形成を記述する普遍性の高いモデルである．後述するように，DLA クラスターはきれいな自己相似フラクタル（self-similar fractals）である．(2) 反応律速型粒子凝集：腫瘍，癌などの増殖を記述するために提案されたイーデン

(Eden) モデルや界面律速型結晶成長が該当する．得られるクラスターはコンパクトで，そのフラクタル次元は空間次元と一致する．しかし，イーデン・モデルなど単純なモデルではその成長界面はラフで，一般に後述する自己アフィン・フラクタル (self-affine fractal) の性質を示す．(3) バリスティック型粒子凝集：粒子の平均自由行程が凝集クラスターのサイズより大きい場合で，真空中での蒸着などを理想化したモデルである．反応律速型粒子凝集と同様，得られるクラスターはコンパクトであるが，成長界面は自己アフィン性を示す．(2) と (3) は細部はともかく，大局的には非常によく似たクラスターを生み出し，クラスター成長モデルとして同じ普遍性クラスに属すると信じられている．

B．クラスター凝集

図1に示されているように，粒子が凝集してできたクラスターそのものも動き回り，個々の粒子や他のクラスターと衝突，凝集を繰り返して成長する．河口での泥の堆積や煙突のすす，食品加工（豆腐など）など，自然，科学，工学を問わず具体例が数多く見られる．これも律速過程などの違いによって次のように細分される．いずれの場合にも非常にすかすかの構造をもった，自己相似なクラスターが得られる．(1) 拡散律速型クラスター凝集：コロイド系の急速凝集が典型的な例である．(2) 反応律速型クラスター凝集：コロイド系の緩慢凝集が該当する．(3) バリスティック型クラスター凝集：クラスターの平均自由行程がクラスター・サイズより大きい場合．

このように分類されたそれぞれの場合について計算機シミュレーションがかなり詳しくなされており，できたクラスターの形態上の特徴や成長のダイナミクスが議論されている．表1に空間次元 $d = 2, 3$ の場合に計算機シミュレーションで得られたクラスターのフラクタル次元 D の値をまとめておく．実験との比較の際，フラクタル次元 D のみがことさら問題にされることが多いが，一般に D だけではなされた実験が上の分類のどれに該当するかは決定しがたいことに注意すべきである．このためには凝集ダイナミクスの特徴を浮き彫りにするような別の測定を積極的に行なう必要がある．



(1)　(2)

(3)　(4)

図1　拡散律速型クラスター凝集のシミュレーション例. はじめ分散していたブラウン粒子が衝突, 付着を繰り返して大きなクラスターへと成長する.

表1　いろいろな凝集モデルに対する計算機シミュレーションで得られたフラクタル次元の値. 空間次元は $d=2,3$. (数値は2〜5％の統計誤差を含む.)

	d	拡散律速	反応律速	バリスティック
粒子凝集	2	1.71	2.0	2.0
	3	2.50	3.0	3.0
クラスター凝集	2	1.43	1.55	1.51
	3	1.75	2.07	1.91

2.2　凝集の実験

凝集現象そのものはもちろん古くから知られていた．しかし，凝集現象全体が前項のように広い視点から捉え直され，個々の凝集現象も理想的な条件下で実験的に詳細に研究されるようになったのは1980年代中頃以降のことで，いわゆる“フラクタル物理”がようやく一部の関心を強くひくようになってからのことである．

ここでは前項の分類法に従ってこれまでになされた凝集の代表的な実験例を列挙してみる．粒子凝集の例としては電析，結晶成長，薄膜成長などが代表例であろう．特に拡散律速粒子凝集のプロトタイプ・モデルであるDLAは，後述するように，単に粒子凝集を越えてラプラス場中でのパターン形成を記述する普遍性の高いモデルのため，これまでDLAに関連した多くの実験がなされている．例を挙げてみると，金属葉（拡散律速下での電析，図2参照），沿面放電，稲妻などの誘電破壊，粘性が極端に違う互いに不溶な2流体の界面不安定性であるヴィスカス・フィンガリング，しのぶ石などに見られるランダムな樹枝状結晶成長，鍾乳洞などに見られる化学溶解，バクテリア・コロニー（図3参照）などがある．現象の多様性に注目していただきたい．図2，3の例から予想されるように，DLAクラスターの特徴はループのない，高度に枝分かれした自己相似フラクタル構造をもつことである．

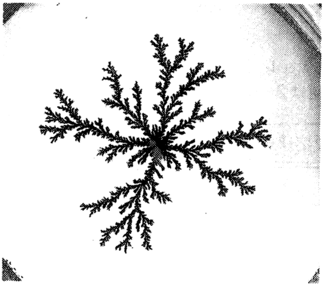


図2　亜鉛金属葉．図5との類似に注意．

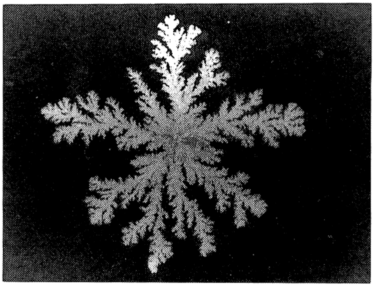


図3　栄養分の拡散律速条件下でのバクテリア（枯草菌）のコロニー．図5との類似に注意．

クラスター凝集の最もよく知られている具体例はコロイド系の急速，緩慢凝集であろう．この現象そのものは古くから定性的に知られていた．それが1980年代になってクラスターのフラクタル構造だけでなく，系のダイナミクス，クラスター・サイズの分布などが定量的に詳しく調べられて，急速，緩慢凝集のそれぞれが拡散律速，反応律速クラスター凝集に該当することが曖昧性なく示されたのである．図4に実験室で容易に実現できるクラスター凝集の例を示す．

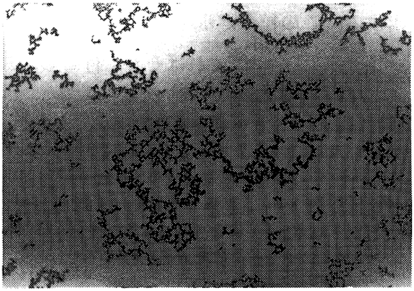


図4　水酸化カルシウム（$Ca(OH)_2$）水溶液の液面に生じた炭酸カルシウム（$CaCO_3$）微小粒が形成したクラスター凝集体．図1との類似に注意．

高真空あるいは高温下でのクラスター凝集ではクラスターの平均自由行程がそのサイズより大きくなり得る．実際，ある種の燃焼ではこのような条件がみたされており，バリスティック型クラスター凝集に該当するという報告がごく少数あるが，それほど明白でなくその例とは断定できない．

3° DLA の理論

DLA は上述のように多彩な現象を記述することからも，またこれから述べるようにモデルの単純さの点からも，ランダム・パターン形成の数理（あるいは統計）物理学におけるプロトタイプ・モデルの代表例と見ることができる．したがって，DLA 研究の進展は取りも直さず，現在数多く提案されてい

るパターン形成のモデルが抱える理論的問題の解決への大きな前進につながり得ることを予め強調しておきたい.

3.1 モデルとシミュレーション

簡単のため，舞台を格子定数1の2次元正方格子（碁盤の目）にとってモデルの説明から始めよう．まず，原点に大きさ1の種粒子を置く．これを中心にしたはるか遠方の円周上でランダムに1点を選び，そこからブラウン粒子（大きさ1）を1個放出する．この粒子が歩幅1のブラウン運動を続け，たまたま原点にある種粒子の最近接点に到達すればそれに付着し，2粒子クラスターができる．遠方の円周上で再びランダムに1点を選び，そこからまたブラウン粒子を放つ．それが原点にあるクラスターの最近接点に来ればそこで付着してクラスターの一員となる．もしブラウン粒子がクラスターからあまりに遠くへ離れて行けば，それを捨てて新たに円周上に1点を選んでブラウン粒子を放つ．これを繰り返すと原点を中心に DLA クラスター（図5参照）が成長する．

原点から最も離れたクラスター上の点までの距離を $R_{\max}$ としよう．十分遠方で放出されたブラウン粒子が原点を中心とし $R_{\max}$ よりも大きい半径 r の円周上に初めて到達する確率はその円周上のどの点でも等しい．[いったん円周内に入ったブラウン粒子がたまたま外に出て再び内部に入ることもあるが，ある1個のブラウン粒子の2度目以降の円周上への到達確率はこの円周内にあるクラスターの形に強く依存することに注意しよう.] したがって，ブラウン粒子を放出する円周（launching circle という）の半径は上の説明のように大きくなくても，たとえば $r=R_{\max}+5$ などとしてよい．しかし，遠くに行ったブラウン粒子を切り捨てる円周（killing circle）を小さくすると，それに影響されたクラスターが成長してしまう．そこで $r=3R_{\max}$ が killing circle の半径としてよく使われる．さらに，クラスターからの距離に応じてブラウン運動の歩幅を長くするなど，計算時間短縮のためのアルゴリズムの改良がいろいろと考えられており，粒子数 $N=10^8$ 以上もの格子を使わない（off-

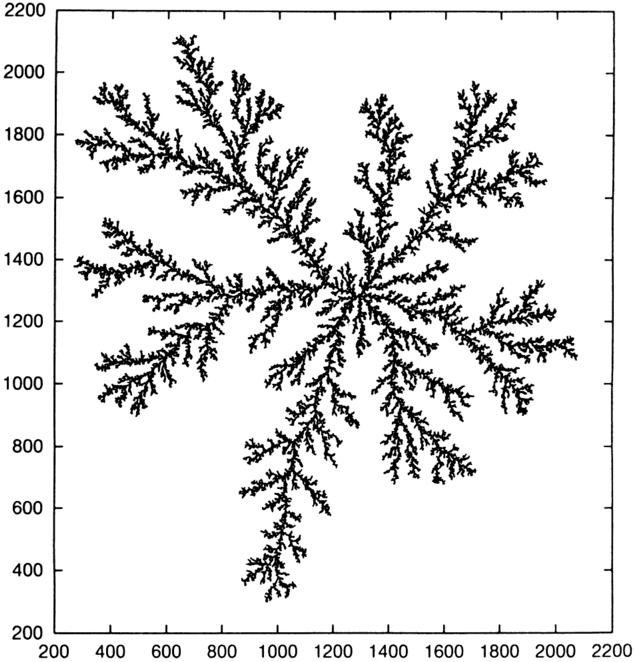


図5　DLA クラスターの例．粒子数 $N=10^5$.

lattice) DLA クラスターがワークステーションで得られている．図5に $N=10^5$ の格子を使わない2次元 DLA クラスターの一例を示す．

このようにして得られた DLA クラスターが自己相似であることは，大規模計算機シミュレーションによって数値的に示されている．2次元，3次元空間でのフラクタル次元 D は，それぞれ $D\cong 1.71, 2.50$ である（表1参照）．DLA の自己相似的成長は定性的には次のように説明できる．クラスターの十分遠方にはブラウン粒子の発生源があり，その意味で遠方でのブラウン粒子の濃度は有限である．クラスター表面ではブラウン粒子が到達すると必ずそこに付着するのだから，ブラウン粒子のクラスター表面での濃度はゼロである．したがって，遠方から来たブラウン粒子はその濃度勾配のためにクラスターの

内部に侵入しようとする．ところが，ブラウン粒子の軌跡はぼやっと拡がっていて，決して直線的ではない（ブラウン粒子の軌跡は自己相似で，そのフラクタル次元 D は空間次元 d に無関係に $D=2$）．したがって，クラスターに近づいてきたブラウン粒子は外に伸び出した枝によって容易に捕獲され，クラスター内部への侵入を妨げられる（遮蔽（しゃへい）効果）．それと同時に，伸び出した枝はいっそう成長する．こうした振舞いはスケールによらない．このように，DLA では粒子の侵入と遮蔽とのバランスによって自己相似的成長が実現しているのである．

クラスターの成長の様子だけに注目すると，外に伸び出した部分がいっそう成長する傾向がある．そのためクラスターは決してバルク状にならず，枝分かれをランダムに繰り返す成長を行なう．そして，近くの枝同士で成長を競い，いったんこの競争に負けると以後その枝はほとんど成長しなくなる．このような熾烈な競争がさまざまなスケールにわたって起こるために DLA クラスターは自己相似フラクタルになるともいえる．しかし，このような単純なモデルでも，以下に述べるような現象論的なモデルはともかく，解析的理論が未だにできていない．

3.2　現象論的理論

ここでは DLA に関するこれまでの主要な理論的試みを概観してみよう．まず，Muthukumar がコヒーレントポテンシャル近似を適用して，d 次元空間にある DLA クラスターのフラクタル次元 D として

$$D(d) = \frac{d^2+1}{d+1} \tag{3.1}$$

という簡潔な表式を導いた．この式はこれまでになされた計算機シミュレーションの結果（$d=2\sim10$）と非常によく合う．しかもこの式は DLA 成長について厳密に証明されている不等式 $d-1 \leq D \leq d$ をみたしている．しかし，その後この理論の妥当性を示したものは誰もいない．

続いて徳山と川崎は線状高分子に対するフローリー（Flory）の平均場理論をDLAに適用して同じ式（3.1）を導いた．これは凝集体の取り得る状態が遮蔽効果による斥力項と空間的拡がりによるエントロピー項とからなる自由エネルギー的な関数を使ってDLAの成長を捉えようとする．示唆に富むアプローチであるが，その仮定の根拠がそれほど明確ではない．

これらに対し，本田，豊木と松下はDLAの成長過程そのものに注目する．彼らはDLAの自己相似的成長の本質が拡散粒子のクラスター内への侵入とすでに伸び出したクラスターの枝による拡散粒子の捕獲・遮蔽にあるとして，凝集カイネティックスを展開した．粒子の拡散の軌跡のフラクタル次元をより一般的に d_w （$1 \leq d_w \leq 2$）とおくと，通常のブラウン運動（$d_w = 2$）だけでなくレビー（Lēvy）飛行による拡散も扱える．もちろん，$d_w = 1$ は直線的，弾道的な粒子軌跡を表す．本田らはこのような一般化された拡散過程の下でのDLAクラスターのフラクタル次元として

$$D(d, d_w) = \frac{d^2 + (d_w - 1)}{d + (d_w - 1)} \tag{3.2}$$

を導いた．この式は $d_w = 2$（ブラウン運動）とおくと確かに（3.1）式に帰着するのでその拡張になっているが，問題の捉え方は非常に異なる．しかもこれまでになされたレビー飛行による計算機シミュレーションの結果とよく合う．それだけでなく，$d_w = 1$ とおくとバリスティック型凝集のシミュレーション結果とぴったり一致する（表1参照）．解析的理論のない現状ではこの現象論が最もコンシステントであることを強調しておきたい．

3.3　DLAの確率性

DLAは粒子の拡散とクラスターへの不可逆的付着とからなり，モデルそのものはいたって単純である．それにもかかわらず結果として成長するパターンは決して単純ではなく，依然として解析的理論を拒み続けている．本項ではDLAに内在する確率過程を分析して，これまでとは別の視点からDLAの

特徴を浮き彫りにしてみよう．そこからDLAの一般化や他の現象，たとえば誘電破壊や樹枝状結晶成長との関連がはっきりしてくるし，解析的理論の発展のきっかけになるかもしれない．

まず，DLAに関連の深いモンテカルロ法によるラプラス方程式の数値解法を復習しよう．ラプラス方程式が境界条件とともに

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{3.3}$$

$$\phi(\mathrm{Q}) = f(\mathrm{Q}), \qquad \mathrm{Q}\in\Gamma \tag{3.4}$$

と与えられたとする．ここで，Γは境界を与え，Qはその上の任意の点である．いま，図6に模式的に示してあるように，吸収型境界Γに囲まれた領域内のある1点Pから出発したブラウン粒子がΓ上の1点Qに到達する確率を$p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$とする．簡単のため，空間は格子構造をもち，各点の最近接点の数をzとしよう（正方格子では$z=4$）．点Pのz個の最近接点をP_iとおくと$p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$は

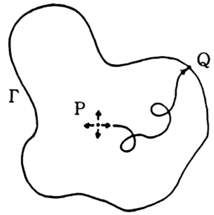


図6　モンテカルロ法によるラプラス方程式の数値解法

$$p(\mathrm{P};\mathrm{Q}) = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z} p(\mathrm{P}_i;\mathrm{Q}) \tag{3.5}$$

をみたす．なぜなら，PからQへ至るブラウン粒子は必ずPの最近接点のどれか一つを経由しなければならず，そのうちのどれを通過するかは全く等確率だから．(3.5) 式が離散型のラプラス方程式に他ならないことはP_iをPのまわりでテイラー展開すればわかる．また，境界を吸収型と仮定したので

$$p(\mathrm{Q};\mathrm{Q}') = \delta_{\mathrm{Q},\mathrm{Q}'} \qquad (\mathrm{Q},\mathrm{Q}'\in\Gamma) \tag{3.6}$$

である．これは$p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$に関する境界条件とみなされる．

この確率$p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$が与えられると点Pでのラプラス方程式（3.3, 3.4）の解$\phi(\mathrm{P})$は次のような形に表される：

$$\phi(\mathrm{P}) = \sum_{\mathrm{Q}\in\Gamma} p(\mathrm{P};\mathrm{Q})f(\mathrm{Q}). \tag{3.7}$$

これがラプラス方程式 (3.3) をみたすことは$p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$が (3.5) 式をみたす

ことで保証されている（$f(\mathrm{Q})$ は定関数）し，境界条件（3.4）をみたすことも（3.6）式より容易に示される．したがって，問題は $p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$ をいかにして求めるかに帰着する．ラプラス方程式の数値解法の一つであるモンテカルロ法ではこの $p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$ を次のようにして求める．境界 Γ に囲まれた領域内の任意の1点Pから放出させるブラウン粒子の総数を N_{P} とし，Γ 上にある1点Qに到達するブラウン粒子の数を n_{Q} とすると，$p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$ は

$$p(\mathrm{P};\mathrm{Q}) = \lim_{N_{\mathrm{P}}\to\infty} \frac{n_{\mathrm{Q}}}{N_{\mathrm{P}}} \tag{3.8}$$

で与えられる．そこで適当に大きな N_{P} を使って $p(\mathrm{P};\mathrm{Q})$ を評価し，それを（3.7）に代入して点Pでのラプラス解 $\phi(\mathrm{P})$ を求める．モンテカルロ法の利点は境界の複雑さを気にしなくてもすむ点にある．

ここで上のモンテカルロ法とDLAとの関連を調べるために，DLA問題に則した境界条件の下でのラプラス場 $\phi(\mathrm{P})$ の性質を考察してみよう．DLAでは成長クラスターそのものが一つの吸収型境界 Γ_0 を与える．さらに，ブラウン粒子を放出する円周がクラスターを囲んではるか遠方にあるので，これを境界 Γ_∞ としよう．［アルゴリズム改良の観点から放出円周はクラスターに近くてよいことを前に記した．ここでは本来のDLAについて議論していることに注意しよう．あるいはブラウン粒子を切り捨てる円周を Γ_∞ と見てもよい．］そこで図7のように，境界 Γ_0 と Γ_∞ に囲まれた任意の1点Pでのラプラス場 $\phi(\mathrm{P})$ を境界条件

$$f(\mathrm{Q}) = \begin{cases} \phi_0 & (\mathrm{Q}\in\Gamma_0) \\ \phi_\infty & (\mathrm{Q}\in\Gamma_\infty) \end{cases} \tag{3.9}$$

の下で求めてみよう．DLA問題に則して ϕ_0, ϕ_∞ は一定とする．（3.7）より $\phi(\mathrm{P})$ は

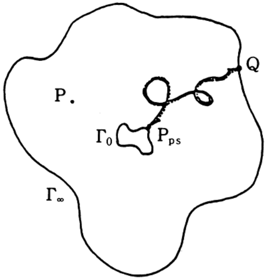


図7　DLAでは内部の境界 Γ_0 が成長クラスターに対応する．

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{P}) &= \sum_{\mathrm{Q}\in\Gamma_0,\Gamma_\infty} p(\mathrm{P};\mathrm{Q})f(\mathrm{Q}) \\ &= \phi_0\sum_{\mathrm{Q}\in\Gamma_0} p(\mathrm{P};\mathrm{Q}) + \phi_\infty\sum_{\mathrm{Q}\in\Gamma_\infty} p(\mathrm{P};\mathrm{Q}) \end{aligned}\tag{3.10}$$

と表される．ところで，点Pを出発したブラウン粒子は境界 Γ_0 あるいは Γ_∞ 上の1点に必ず到達するので，条件

$$\sum_{Q\in\Gamma_0} p(P;Q) + \sum_{Q\in\Gamma_\infty} p(P;Q) = 1 \tag{3.11}$$

が自動的にみたされる．これを使って上式で境界 Γ_0 の項を消去すると，

$$\phi(P) - \phi_0 = (\phi_\infty - \phi_0) \sum_{Q\in\Gamma_\infty} p(P;Q) \tag{3.12}$$

が導かれる．

ここで図7に示したように，点Pとして境界 Γ_0 の周辺点 (perimeter sites) の一つ P_{ps} をとると，この点が境界に非常に近いので (3.12) 式の左辺はその点でのラプラス場の勾配 $|\nabla\phi(P_{ps})|$ に比例するとしてよい．したがって，(3.12) は

$$|\nabla\phi(P_{ps})| \sim \sum_{Q\in\Gamma_\infty} p(P_{ps};Q) \tag{3.13}$$

と表される．ところで，上式右辺内の $p(P_{ps};Q)$ は境界 Γ_0 の周辺点 P_{ps} から出発したブラウン粒子がもう一つの境界 Γ_∞ 上の点Qに到達する確率である．これはブラウン運動の可逆性から逆にQから出発して P_{ps} に到る確率に等しい．このことを考慮すると上式は

$$|\nabla\phi(P_{ps})| \sim \sum_{Q\in\Gamma_\infty} p(Q;P_{ps}) \tag{3.14}$$

となる．この式の右辺は境界 Γ_∞ から出発したブラウン粒子が境界 Γ_0 の周辺点 P_{ps} に到る確率を表す．したがって，上式は点 P_{ps} でのブラウン粒子の流れがその点での場の勾配に比例するという，よく知られた結果が得られたことを意味する．

以上の結果を踏まえてDLAの特徴をもう一度，別の観点から考えてみよう．DLAでは遠方の境界 Γ_∞ 上の1点を出発したブラウン粒子がクラスターの表面 Γ_0 の周辺点 P_{ps} に到達すると直ちにそこに静止・付着し，クラスターの一員となる．したがって，DLAの特徴は次の2点にまとめられる．第一に，クラスターの周辺点 P_{ps} での成長確率は

$$p_g(P_{ps}) \equiv \sum_{Q\in\Gamma_\infty} p(Q;P_{ps}) \tag{3.15}$$

と定義されるが，これは（3.14）式によりその点でのラプラス場の勾配に比例する；

$$p_g(\mathrm{P_{ps}}) \sim |\nabla\phi(\mathrm{P_{ps}})|. \tag{3.16}$$

第二に，クラスターは遠方で放出されたブラウン粒子の付着で成長するので，成長サイトの選択そのものは確率的であって，何ら平均操作が含まれていない．すなわち，DLA はラプラス場の中での確率的なパターン形成であり，その成長確率は（3.16）で与えられるとまとめることができる．

以上のことから次のような興味深い問題が出てくる．(a) 成長サイトの選択に適当な平均操作を導入するとパターンはどう変化するだろうか．(b) 成長確率（3.16）をより一般的な形に拡張するとパターンはどう変化するだろうか．

前者の問題は正方格子など格子上のシミュレーションで容易に調べることができる．たとえば，クラスターの周辺点すべてにカウンターを置き，到達するブラウン粒子をカウントする．もしある周辺点のカウント数が指定された数 m（たとえば $m=20$）に達すれば，その周辺点を成長させクラスターの一員にすると同時に新しくできた周辺点にカウンターを置く．この操作を繰り返すのである（モンテカルロ平均）．数 m を大きくすると平均操作が強くなることは自明であろう．実際，このようなシミュレーションを行なうと，背景格子の異方性を強く反映した，たとえば雪の結晶など，樹枝上結晶に非常によく似たパターンが得られることが知られている．

次の項では (b) の問題を議論しよう．ただし，ここで注意を一つしておく．DLA では実際の成長点の決定は Γ_∞ 上のある 1 点 Q から放出されたブラウン粒子にゆだねられている．その上で DLA クラスター固有の性質を調べるためには，外側の境界 Γ_∞ はクラスターの表面 Γ_0 から十分遠くになければならない．このときにのみ（3.15）より成長確率 p_g が Γ_∞ の詳細によらず，クラスター固有の性質が考察できるのである．逆に言えば，もし Γ_∞ が Γ_0 に近いと，当然クラスターは Γ_∞ の形に強く影響されて成長する．2次元の場合のシミュレー

ションについて具体的に言えば，ブラウン粒子を放出する円周は前述したようにクラスターを横切らない限りそれに近くてもかまわない．しかしながら，ブラウン粒子が離れていったときに切り捨てる円周の径は十分大きくなければならないということである．

3.4　DLA の一般化

前述の分析により，DLA の特徴の一つはクラスター界面での成長確率がそこでのラプラス場の勾配に比例するということであった．これはモデルの説明より，実際にブラウン粒子が拡散してきてクラスター表面に付着するということからくるごく自然な結論である．しかしながら，一般的なパターン形成の観点からすると，必ずしも成長確率 p_g が場の勾配に比例すると限定する必要はない．ラプラス場の中でのパターン形成に問題を限定しても，次式

$$p_g(\mathrm{P_{ps}}) \sim |\nabla\phi(\mathrm{P_{ps}})|^{\eta} \tag{3.17}$$

がより一般的である．これは実は Niemeyer, Pietronero & Wiesmann (NPW) が彼ら自身の2次元誘電破壊（リヒテンベルク図）の実験を説明するために提案したモデルである．$\eta=1$ とすると通常の DLA が得られるし，$\eta\to 0$ ではクラスター表面のどの点でも成長確率が同じだという意味で前述のイーデン・モデルをも含むことになる．そこで，式 (3.17) の成長確率をもつモデルを一般化 DLA (generalized DLA) と呼ぼう．ただし，このモデルは誘電破壊モデル (dielectric breakdown model; DBM)，NPW あるいは η モデルと呼ばれることもある．

一般化 DLA はクラスター界面が必ずしも現実の物質の流れによって成長するわけではない場合にも適用できる．たとえば，誘電破壊ではすでに放電が起こってしまった道筋ではともかく，まだ放電していない領域では電子もイオンも流れているわけではない．放電の進行につれてラプラス方程式をみたす静電場 ϕ が変化しているだけである．そのうえ，放電路の表面での放電進行の確率はそこでの電場 $|\nabla\phi|$ に比例するとは限らず，(3.17) 式のように仮

定して指数 η が誘電媒質の物性によると考える方がより一般的であろう．また，実際に物質の流れとその付着でパターンが成長するのではないという点ではヴィスカス・フィンガリングも同様である．しかし，この場合には現象論的に成長界面の速度がそこでの圧力勾配に比例する（ダーシーの法則）ことがわかっているので $\eta=1$ となり，通常のDLAの一例とみなしてよいことになる．

この一般化 DLA に対して NPW は単純に数値解法を試みただけであるが，この問題にも 3.2 項で触れた本田らの現象論が適用できる．それによると一般化 DLA で成長するクラスターのフラクタル次元は

$$D = \frac{d^2 + \eta(d_w - 1)}{d + \eta(d_w - 1)} \tag{3.18}$$

となる．この式は（3.1），（3.2）の素直な拡張であるだけでなく，大規模シミュレーションで示されたバリスティック凝集（$d_w = 1$）とイーデン・モデル（$\eta = 0$）との同等性（いずれも $D = d$）をごく自然に表している．また，これまでになされた多くのシミュレーションともよく一致する．さらに $\eta \to \infty$ の場合，式（3.17）から場の勾配の差が強調されてパターンはあまり枝分かれせず線状（$D = 1$）に成長することが予想されるが，上式は確かに $D \to 1$（$\eta \to \infty$）となる．

4° 自己アフィン・フラクタル

幾何学的に規則的な自己相似フラクタル曲線の典型例であるコッホ曲線では，その大きさ（両端を結ぶ直線距離）が有限であっても長さは無限大である（あるいは長さがない）．このようなことはイニシエータである初めの線分（両端を結ぶ線分）上にコッホ曲線を投影したときに無限の重なりがなければ起こり得ない．では山並みはどうだろうか．確かに山並みは大小さまざまな凹凸からなり自己相似に見えるかもしれないが，それを水平線上に投影した

ときにコッホ曲線と同様な無限の重なりがあるとはとても思えない．山並みは自己相似ではなさそうである．では何の規則性もないのだろうか．

4.1　自己アフィン性

図8は時刻 $t=0$ に位置 $x_H=0$ を出発した1次元ブラウン運動の変位 $x_H(t)$（ただし，通常のブラウン運動では下付き $H=1/2$；この意味については後述）を t の関数として描いたものである．



図8　1次元ブラウン曲線 $x_H(t)$（$H=1/2$）の例

一見したところ，近くから見た北アルプスの山並みと見えなくもない．これを1個の与えられた曲線とみなし，時刻0から T までのこの曲線の長さを N としよう．図8の時空間（t-x_H 平面）での歩幅は一定の長さをもつので，N はもちろん T に比例する．すなわち，曲線の横幅 T は長さ N に対して

$$T \sim N^{\nu_t}, \qquad \nu_t = 1 \tag{4.1}$$

とスケールされる．他方，時間 T 内のブラウン運動の変位の大きさの目安としてその標準偏差 $X=\sqrt{\langle x_H^2(T)\rangle}$（$\langle A\rangle$ は量 A の集団平均を表す）を採用すると，よく知られているように，$X \sim T^{1/2}$ である．したがって，このパターンの縦幅 X は長さ N に対して

$$X \sim N^{\nu_x}, \qquad \nu_x = \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

とスケールされる．以上により，このブラウン曲線 $x_H(t)$（$H=\nu_x=1/2$）から任意にとった部分曲線では，その長さ N に対して縦幅 X と横幅 T のスケールのされ方（4.1），（4.2）が異なっていることがわかった．

コッホ曲線や DLA クラスターのような自己相似パターン（そのフラクタル

次元 : D）では縦横無関係に大きさ R は粒子数 N（コッホ曲線では近似した線分の数）に対して

$$R \sim N^{\nu}, \qquad \nu = \frac{1}{D} \tag{4.3}$$

と等方的にスケールされる．これに対して図8のように，より一般的に方向によってスケールのされ方が異なる特性を自己アフィン性（self-affinity）といい，この特性をもつパターンを自己アフィン・フラクタル（self-affine fractals）と呼ぶ．このような場合には1個の指数 ν（あるいは D）だけではパターンを特徴づけることができず，一般に複数個のスケーリング指数 ν_i が必要である．図8の例では ν_x, ν_t の2個が必要であった．すなわち，自己相似は自己アフィンのうちでスケーリング指数がすべて等しいという特別な場合にすぎない．

図8のブラウン曲線をもう少し詳しく分析して自己アフィン・フラクタルの性質を考察してみよう．図9（a）は図8のブラウン曲線を非常に長くとったもので，この曲線を十分遠くから眺めたと思えばよい．これのはじめの 1/32 を 32 倍に等方的に拡大したのが（b）である．コッホ曲線など自己相似フラクタルと違って，（a）と（b）は似ても似つかないのでブラウン曲線は自己相似ではない．ところが，はじめの 1/32 を横は 32 倍に，縦は $\sqrt{32}$ 倍に異方

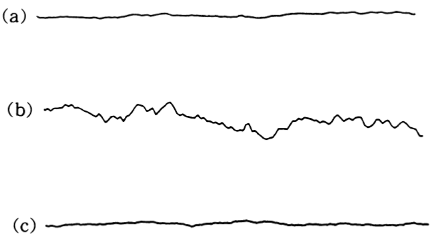


図9 （a）十分長い1次元ブラウン曲線．（b）はじめの 1/32 を 32 倍に等方的に拡大したもので，（a）との相違に注意．（c）はじめの 1/32 を横は 32 倍に，縦は $\sqrt{32}$ 倍に拡大したもので，（a）との類似に注意．

的に拡大する（図9（c））と，元の（a）と同じように見える．これが異方的スケーリングの意味である．

図9の（a）と（b）に見られる，等方的に拡大したときのパターンの変化は次の点で深刻な問題をはらむ．すなわち，自己相似フラクタルの場合にそのフラクタル次元を決定するために考案されたボックスカウント法などの簡便な方法は等方的に拡大したときにパターンの変化がない（同じように見える）ことを前提にしており，自己アフィン・フラクタルには使えない．もし無理に適用すると，フラクタル次元がスケールに依存して変化するという不合理な結果になってしまう．もちろん，局所次元（パターンの局所的なスケーリング性に基づく次元）や大局次元（十分遠方から見たときのパターンの大局的スケーリング性に基づく次元；ブラウン曲線のような時系列曲線では図9（a, c）から予想されるように常に1）などをブラウン曲線のような既知の曲線に定義することはできる．しかし，これらの次元はいずれも与えられた曲線の極限的な性質から決まる量である．その特徴が知りたい未知の，しかも有限な長さの曲線が与えられたときに，これらの次元は一般には求めることができない．

4.2　自己アフィン指数の求め方

たとえば図8のような曲線が未知の曲線として与えられたとしよう．これは自己相似ではないとしても，何らかのスケール不変な性質をもっているかもしれない．それをこの有限な曲線から引き出すにはどうすればよいだろうか．フラクタル次元Dをあきらめ，素直にスケーリング指数ν_iを探ればよいのである．そのために，与えられたパターン（ブラウン曲線のような単純なパターンだけでなく樹木や岩石など一般のパターンそれ自体あるいはその表面などすべてを含む）が適当な最小長さスケールa_0をもつ最小単位（線分，円盤，球など）で構成されているとみなす．自己相似フラクタルに対するボックスカウント法と違って，この最小長さスケールは以後いっさい変えない．すなわち，与えられたパターンがたとえば直径a_0単位粒子からできているとみなすのである．

ここで簡単のために2次元空間内の一つのパターンを考えよう．このパターンを構成する単位粒子の総数を N, i 番目の粒子の座標を (x_i, y_i) として，パターンの座標に関する分散 X^2, Y^2 を計算すると

$$X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_c)^2, \qquad Y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - y_c)^2 \tag{4.4}$$

となる．ここで (x_c, y_c) はパターンの重心；

$$x_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i, \qquad y_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i \tag{4.5}$$

である．標準偏差 X, Y はこのパターンの x, y 方向の大まかな大きさを表す．こうして与えられた1個のパターンについて1組の値 $(N; X, Y)$ が得られた．つぎに，同じ起源をもつ大小さまざまな同種パターンについて上の手続きを繰り返して多数の値の組 $(N; X, Y)$ を求め，X と Y を N に対して両対数プロットする．特にパターンが図8のような曲線の場合には，多数の曲線を用意するまでもなく1本の曲線を大小さまざまに切断してできる部分曲線を使えばよい．そして，X, Y が N に対して

$$X \sim N^{\nu_x}, \qquad Y \sim N^{\nu_y} \tag{4.6}$$

とスケールされるかどうかチェックする．もし (4.6) がある範囲で成り立つ（一般に $\nu_x \neq \nu_y$）ことが確認されれば，このパターンはその範囲内で自己アフィンであり，ν_x と ν_y がそのパターンを特徴づける自己アフィン指数である．この方法を高次元に拡張することは容易であるし，もちろん自己相似パターンにも何ら問題なく使える．

次ページの図10は図8のブラウン曲線に上の方法を適用した例である．ブラウン曲線のスケールによらない特性 $(\nu_x = 1/2, \nu_t = 1)$ がこの方法によって曖昧性なく引き出されている様子がよくわかる．実際，元の曲線の縦軸または横軸を定数倍しても，図10の直線が上下または左右にシフトするだけであって，傾き自体は変わらない．この方法は未知の曲線，実際の山岳地形の垂直断面プロフィール（山並みに近い）に適用され，自己アフィン性が成り立っている場合もあることが示されている．

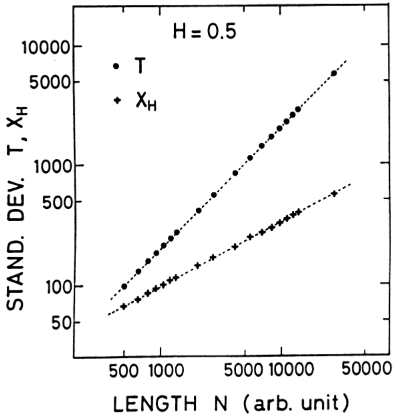


図10　図8に示したブラウン曲線上の任意の2点間の長さ N とその間の横軸および縦軸方向の変化の標準偏差 T と X_H との関係．傾きから $\nu_x \cong 0.50$, $\nu_t = 1.00$ と求められる．

一般に，パターンが形成される過程が著しく異方的な場合には，そのパターンは自己アフィンの可能性が高いと考えてよい．この意味で地表や固体の破断面など物体の表面は多くの場合，自己アフィンだと思われる．

図8のブラウン曲線や $1/f$ ノイズ曲線，地表の垂直断面プロフィールをはじめ，時系列的な曲線は概して自己アフィンである．これらの場合には横 (x) 軸は自明で，図10に見られるようにいつでも $\nu_x = 1$ である．このとき縦 (y) 軸方向の変化の自明でない指数 ν_y (<1) は通常，ハースト指数 H と呼ばれる．このようにハースト指数1個で指定されるような曲線に対してはパワースペクトルを求めるなど，フーリエ解析すればことがすむ．しかし，いつでもこのような単純なパターンばかりが問題になるとは限らない．実際，後述するように，いくつかの粒子凝集モデルでは $\nu_x \neq \nu_y < 1$ である自己アフィン・クラスターが成長することが知られている．

4.3　自己アフィン表面の等高線

地表が自己アフィンだというのなら，なぜその一部である海岸線が自己相

似なのだろうか．定性的には一般に水平方向には異方性が考えられないからであるが，これにはもう少し定量的な議論を進めることができる．

ハースト指数Hで指定された自己アフィン表面を考えよう．この表面から任意にとった垂直断面プロフィールは水平 (x) 方向に $\nu_x=1$，垂直 (z) 方向に $\nu_z=H<1$ とスケールされる自己アフィンな非整数ブラウン運動曲線 $z_H(x)$ で表される．また，表面の等高線は一般にループの集まりである．このとき，高さを指定した等高線ループの集まり全体のパターンは自己相似で，そのフラクタル次元D_eは $D_e=2-H$ であることが示される．海岸線は等高線の特殊例だから，もし地表が自己アフィンなら海岸線は自己相似だというわけである．

さらに，個々の等高線ループのフラクタル次元D_iがパターン全体のそれD_eより小さい ($D_i<D_e$) ことや，等高線ループのサイズ分布がベキ乗的になることも示されている．等高線が2次元空間での自己回避型非整数ブラウン曲線とみなされるので，次元D_iはフローリーの線状高分子の理論を援用すると現象論的に

$$D_i = \frac{2}{1+H} \tag{4.7}$$

と導かれる．

5° フラクタル・クラスターの統計

DLA やイーデン・モデル，バリスティック凝集モデルにおいては，第3節で DLA について議論したような1点からの成長だけでなく，線あるいは面などの下地 (substrate) からの成長が考えられる．それどころか，薄膜蒸着や沈殿などの実際問題にはこの方がより関連が深いといえる．このような場合にできる構造はごく自然なやり方で，下地から成長した個々のクラスター (連結した粒子の集まり) あるいは木 (tree) に分割できる．このことは図11に見られるように下地から成長した個々のクラスターが決してぶつからない DLA では明らかであるが，クラスターがコンパクトに成長するバリスティック凝

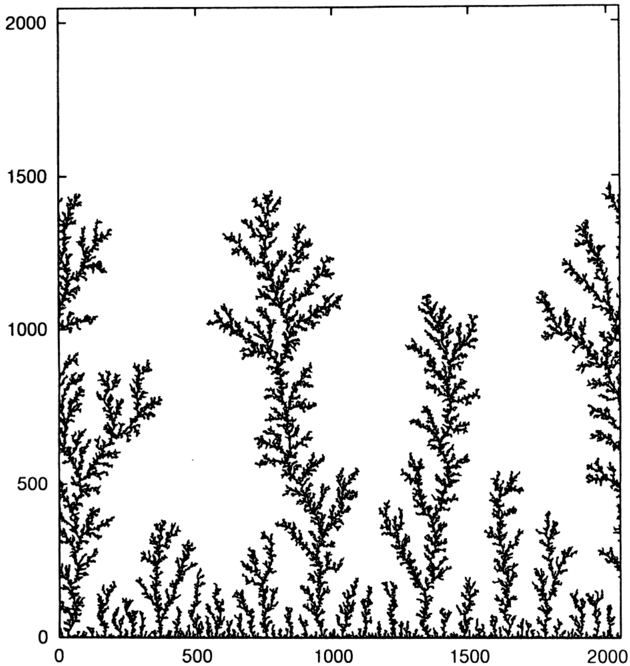


図11　1次元（線状）の下地から成長した DLA クラスター（全粒子数 $N=10^5$）．このパターンは個々の木の集まりとみなされる．

集やイーデン・モデルでも可能である．これらの場合には新しく成長したサイトがいくつかの隣接するクラスターに共有されることが起こり得るが，等確率など適当なルールに従ってその都度どれか一つのクラスターに属するように決めてゆけばよい．こうして，線や面などの下地からの成長においては，パターン全体の構造，個々のクラスターの構造やサイズ分布などの統計が相互にどう関連しているかという興味深い問題が生じてくる．全体のパターンというのは個々のクラスター（あるいは個々のパターン）の構造と統計に従って空間分割されてできているものであり，そのような全体構造が DLA などの単一モデルから生成されたのならば，それらの間に密接な関係があると考

えるのはごく自然のことであろう．この意味で前節最後に触れた等高線ループの構造とサイズ分布の関係も同様の問題とみなされる．

5.1 クラスター・サイズ分布関数

クラスターが線や面などの下地から成長する際には，それらが互いに競合しながら全体パターンを形成する．全体パターンも個々のクラスターもその構造特性は元の成長機構によって決定される．たとえば下地から成長させたDLA では，全体パターンも個々のクラスターもともに，点から成長させた DLA クラスターと同じフラクタル次元をもつ自己相似構造を示す．しかし，一般には両者が同じ構造をもつとは限らない．たとえば，イーデン・モデルでは全体パターンはコンパクトであってそのフラクタル次元 D は空間次元 d に一致する（$D=d$）が，個々のクラスターは自己アフィン・フラクタルであることが知られている．

そこで，第4節の自己アフィン・フラクタルの議論を踏まえて，全体パターンを構成する個々のクラスターを次のように特徴づけよう．構成粒子数 s からなるクラスターに注目し（この粒子数 s をクラスターのサイズと呼ぶ），下地からの自乗平均高さの平均値（同じ粒子数 s をもつ多くのクラスターについての平均値）を h_s，クラスターの下地に平行な自乗平均幅の平均値を w_s とおく．そして高さ h_s，幅 w_s がサイズ s に対して

$$h_s \sim s^{\nu_h}, \qquad w_s \sim s^{\nu_w} \tag{5.1}$$

とスケールされると仮定する．上式は前節の（4.6）と同じ形であることに注意しよう．すなわち，全体のパターンを構成する個々のクラスターをより一般に自己アフィンとみなすわけである．もちろん，下地に DLA を成長させたような自己相似の場合には，$\nu_h=\nu_w=\nu=\dfrac{1}{D}$（$D$：個々のクラスターのフラクタル次元）とおけばよい．

いま考えている問題すべてに共通する特徴が一つある．それは下地から成長する個々のクラスターが競合しながら全体パターンを形成するということ

である．いったんあるクラスターが近くのクラスターより大きくなると，競合に負けた近くのクラスターの成長を抑えていっそう大きくなり，より遠くにある同じくらいの大きさのクラスターと競合するようになる．このように，個々のクラスターのスケールによらない競合が繰り返されて，全体のパターンが形成されていくわけである．このような場合には，全体のパターンの中でのサイズ s のクラスターのサイズ分布 n_s は s についてスケール不変なベキ乗的な形をとるとするのが最も自然であろう．そこでサイズ分布として次のような2指数スケーリング形

$$n_s(N) \sim s^{-\tau} f(s^{\sigma}/N) \tag{5.2}$$

を仮定する．ここで N は下地サイト1個あたりの粒子数であり，カットオフ関数 $f(x)$ は $f(x) \simeq 1$ $(x \ll 1)$, 0 $(x \gg 1)$ のように振る舞う．

5.2　スケーリング関係

以上の仮定の下に，全体パターンの粒子数や自乗平均高さを個々のクラスターについての量で表すこと（和則； sum rule）によって次のようなスケーリング則

$$\sigma = 2 - \tau \tag{5.3}$$

$$\tau = 2 - \nu_h (D - d_s) \tag{5.4}$$

が得られる．ここで d_s は下地の次元である．このスケーリング則（5.4）は，これまでに述べてきたものを含めて，調べられたほとんどの成長モデルについてよく成立することが確かめられている．

6° マルチフラクタル

現実には，フラクタルを自己相似から自己アフィンへと拡張してもまだ捉え切れない興味深いパターンがたくさんある．我々日本人にはお馴染みの墨流しのパターンは，変幻自在な線状部分だけを取り出せばあるいは自己相似

かもしれない．しかし，あの微妙な濃淡の変化を無視しては，墨流しパターンの不思議な美しさを逃すことになろう．

第3節で議論したDLAパターンが導体でできているとして，これを囲む十分遠方の電極との間に電圧をかけたときにこの導体表面に生じる誘起電荷の分布を考えてみよう．導体が等電位であるために外に伸び出した枝の先端部では誘起電荷の密度は高く，奥まった枝の付け根あたりでは非常に低い．すなわち，誘起電荷は自己相似フラクタルであるDLAパターン上に極端な濃淡をもって分布する．

これら墨流しの濃淡や導体表面上の誘起電荷のような物理量の分布パターンはどのように定量的に特徴づけたらよいのであろうか．導体DLAの場合には，DLA自体が単一のフラクタル次元をもちその上に乗った濃淡の分布なのだから，それがフラクタル次元で表されるとしても1個ですむわけがない．とてもこれまでのように単一のフラクタル次元，あるいは有限個のスケーリング指数で特徴づけ得るとは思えない．このような場合には，いろんな値の指数をもったパターンが無数に重なり合って一つのパターンができている，あるいは指数が空間内やパターン上で揺らいでいると見ればよいであろう．したがって，この場合には指数の分布を指定しなければならない．このようにして特徴づけられる何らかの物理量の分布パターンをマルチフラクタル(multifractals)と呼ぶ．これは自己相似の大幅な拡張とみなされる．なぜなら，たとえばDLAパターンの場合，その上の誘起電荷の分布ではなく空間内でのパターンの存在そのもの（濃淡なし）を問題にするだけなら，それは自己相似であって単一のフラクタル次元で特徴づけられるからである．

6.1　特異性指数 α

ある非負の物理量（導体表面の誘起電荷，乱流中のエネルギー散逸率や渦度，または不均一物体中の応力など通常の物理量だけでなく，墨流しのように単なるパターンの濃淡でもよい）が空間内に分布している場合を考えよう．この分布は墨流

しや乱流のように考える空間全体に拡がっていてもいいし，導体表面の誘起電荷のように空間中のある領域に限られていてもよい．さらに，この限られた領域そのものが DLA クラスターのように自己相似フラクタルであってもかまわない．

d 次元空間中の位置 $\boldsymbol{r}$ における上述のような非負の物理量を $\psi(\boldsymbol{r})$ としよう．考える系（体積 V）全体を1辺 ε の d 次元立方体セルに分割する．i 番目のセル（体積 $v_i=\varepsilon^d$）内の $\psi(\boldsymbol{r})$ の分布の確率測度 $P_i(\varepsilon)$ を

$$P_i(\varepsilon) = \frac{\int_{v_i}\psi(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}}{\int_V\psi(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}} \qquad \left(\sum_i P_i(\varepsilon) = 1\right) \tag{6.1}$$

と定義しよう．この確率測度 $P_i(\varepsilon)$ は $\varepsilon\to 0$ に対して一般に

$$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha} \tag{6.2}$$

とスケールされるであろう．この指数 α は特異性指数（singularity exponent）またはリプシッツ・ヘルダー（Lipschitz-Hölder）指数と呼ばれ，確率分布の局所的な性質を特徴づける量である．

この指数 α の具体例としては，図12のような2次元静電場（ラプラス場）ϕ 中の楔形導体表面での誘起電荷 σ の分布を考えるとよい．導体表面上の電場を E_n（$\boldsymbol{n}$ は表面の法線を表す）とすると，ガウスの法則により

$$4\pi\sigma = E_n = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \tag{6.3}$$

と表される．楔の開き角を図のように $\gamma=2\pi-\beta$ として楔の先端近くでラプラス方程式 $\nabla^2\phi=0$ を解くと，よく知られているように，楔の先端から距離 r，楔の1辺から角度 θ の位置で

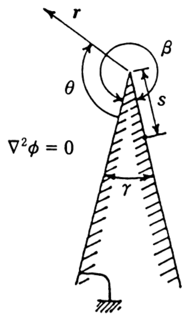


図12　2次元楔形導体

$$\phi = Ar^{\lambda}\sin\lambda\theta, \qquad \lambda = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2\pi-\gamma} \tag{6.4}$$

となる．以上より，楔の表面上で先端から距離 s の位置での電荷分布密度 $p(s)$ は

$$p(s) \sim \sigma(s) \sim \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{r=s} \sim s^{\lambda-1} \tag{6.5}$$

と求められる．したがって，楔形導体の表面（1次元）で考えてその先端での誘起電荷の確率測度 $P(\varepsilon)$ は

$$P(\varepsilon) = \int_{s \le \varepsilon} p(s)\,ds \sim \varepsilon^{\lambda} \tag{6.6}$$

で与えられる．すなわち，楔の先端での誘起電荷の分布の特異性指数 α は（6.2）と（6.6）との比較から楔の角度 $\gamma = 2\pi - \beta$ を使って

$$\alpha = \lambda = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2\pi - \gamma} \tag{6.7}$$

と表されることがわかる．楔の開き角 γ が特別な場合；$\gamma = 0, \pi, 2\pi$ にはそれぞれ $\alpha = \frac{1}{2}, 1, \infty$ となる．楔の辺上では $\gamma = \pi$ とみなされるので，そこでは $\alpha = 1$ である．辺上では $P(\varepsilon)$ が $\varepsilon \to 0$ で ε に比例するのは当然なので，この結果は納得のいくところであろう．

ちなみに，上例のようにラプラス方程式の解で表される確率測度を調和測度（harmonic measure）という．この調和測度の一般的な性質については後で議論する．

6.2 $f(\alpha)$ スペクトル

もう一度 DLA クラスターを取り上げてみると（図5参照），これは尖（とが）ったものやへこんだのや大小さまざまの開き角をもつ楔の集合からなるとみなされよう．前と同様にこのクラスターが導体でできているとして，その表面上での誘起電荷分布を考えてみる．外に突き出した枝の先端部を楔で近似すると，その角度 γ が小さく（β が大きく），したがって（6.7）式より α は小さい．他方，クラスター内部に深く切れ込んだ“フィヨルド”の奥の部分では楔角 γ が大きく（β が小さく），α は大きい．換言すると，誘起電荷の分布測度の特異性指

数 α そのものが DLA クラスター上（正確にはその表面；このように確率測度が乗っている部分を測度のサポートという）にいろいろな値をとって分布する．

そこでこれを一般化して，ある領域（サポート上）に分布する任意の物理量の確率測度を考える．このサポートそのものが，上例の DLA クラスターのように，フラクタル次元 D_0 の自己相似フラクタルとしておく．それが通常の線や面，空間ならば，それぞれ $D_0=1, 2, 3$ とおけばよい．このサポート上で指数 α が $\alpha' \sim \alpha'+\Delta\alpha'$ の間の値をとる点の集合に注目しよう．この点集合は自己相似なサポートの部分集合なので，その上にフラクタル次元 $f(\alpha')$ で自己相似的に分布すると仮定するのが自然であろう．すなわち，この集合の中の点の数 ΔN は $\varepsilon \to 0$ で

$$\Delta N \cong \Delta\alpha' \rho(\alpha') \varepsilon^{-f(\alpha')} \tag{6.8}$$

と表されると仮定するわけである．$f(\alpha)$ はサポート上で指数 α をもつ点集合のフラクタル次元を意味し，一般に α によってその値が変わる．マルチフラクタルの名の所以である．また，$f(\alpha)$ はサポート上の部分集合のフラクタル次元なので

$$f(\alpha) \leq D_0 \tag{6.9}$$

をみたし，注目している物理量の分布の大局的な性質を特徴づける量である．以上により，ある物理量の確率測度の $f(\alpha)$ スペクトルが求められればその確率分布の特徴が捉えられたことになる．

図12に示したような2次元楔形導体の誘起電荷分布についての $f(\alpha)$ スペクトルは容易に求められる．(6.7) 式より楔の先端で $\alpha=\dfrac{\pi}{\beta}$，この α をもつ点集合は先端の1点なのでそのフラクタル次元は $f=0$ である．また，楔の両側面では $\gamma=\pi$ より $\alpha=1$，この α をもつ点集合（線）のフラクタル次元は $f=1$ である．すなわち，この場合の $f(\alpha)$ スペクトルは

$$f(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = \dfrac{\pi}{\beta} = \dfrac{\pi}{2\pi-\gamma} \\ 1, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{6.10}$$

の2点で表される.

6.3　一般化次元 D_q

前項で取り上げた単純な楔ではなくて，DLA クラスターのようにはるかに複雑なフラクタル上に誘起された電荷分布などの場合の $f(\alpha)$ はどうであろうか．原理的には，クラスター上の各点で (6.2) 式に従って α を求めてクラスター上で α の地図を作り，それを基に (6.8) 式から $f(\alpha)$ を決定することも可能である．しかしこれはあまり実際的ではなく，通常は次のような手続きをとる．

まず，(6.1) 式の確率測度 $P_i(\varepsilon)$ からその $(q-1)$ 次モーメント，あるいは"分配関数"

$$Z_q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [P_i(\varepsilon)]^q \tag{6.11}$$

を定義する．ここで $N(\varepsilon)$ は考えている系内で実際に 0 でない確率測度をもつ（すなわち，この測度のサポートをカバーするのに必要な）セルの総数であることを注意しておく．この $Z_q(\varepsilon)$ はコンピュータを使えば比較的容易に計算できる．これも $\varepsilon \to 0$ の極限で，q に依存した形で

$$Z_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\tau_q} \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{6.12}$$

とスケールされると見るのが自然である．それが本当かどうかは (6.11) で ε を変えて $Z_q(\varepsilon)$ を計算し，そのスケーリング性を確かめればよい．ここで上式の指数 τ_q を

$$\tau_q = (q-1)D_q \tag{6.13}$$

とおく．因子 $(q-1)$ は (6.1) と (6.11) から $Z_{q=1}=1$ でなければならないこと（規格化条件）からきている．(6.11) 式より Z_q は確率分布の情報をくまなく内包するので，(6.12) と (6.13) から導かれる

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln Z_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \tag{6.14}$$

もこの確率分布を特徴づける量であるということができる．この D_q を一般化

次元（generalized dimension）という．

一般化次元 D_q の一般的な性質を見ておこう．$q=0$ のときには $Z_{q=0}=N(\varepsilon)$ だから

$$D_0 = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \tag{6.15}$$

となり，これはサポートのフラクタル次元に他ならない．また，$q=1$ では（6.14）式は直接使えないが，（6.11）と（6.14）において $q=1+\delta,\ \delta\to 0$ とすることにより

$$D_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon)\ln P_i(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \tag{6.16}$$

と導かれる．これは式の形から情報量の ε に対するスケーリング性を表すので，情報次元（infomation dimension）と呼ばれている．また，D_2 はサポート上の点集合の分布の相関に関係するので，相関次元（correlation dimension）と呼ばれる．特に，DLA クラスター上の誘起電荷ではなくてクラスターそのもののように，確率分布がサポート上で一様に分布する場合には，$P_i(\varepsilon)=N(\varepsilon)^{-1}$，したがって $Z_q(\varepsilon)=N(\varepsilon)^{1-q}$ であり，（6.14）から D_q は q によらず，

$$D_q = D_0 \tag{6.17}$$

となる．一般には，D_q は q に関して減少関数

$$D_q \geq D_{q'} \qquad (q<q') \tag{6.18}$$

であることが証明されている．等号は（6.17）式の場合である．

しかし，D_q は一般には次元とはいえない．$f(\alpha)$ ではある物理量の空間分布の局所的な性質を α で，大局的な性質を f で特徴づけていたわけであるが，D_q ではどうであろうか．（6.11）式において $q\to\infty$ では確率最大の部分が，$q\to-\infty$ では確率最小の部分が Z_q に主に寄与する．このことからわかるように，q を変えることによって（6.11）式の和に主として寄与する部分を次々にピックアップすることができる．D_q は q でチューニングした部分のスケーリング指数なのである．以上によって，D_q スペクトルがわかれば，問題にして

いる確率分布の性格を特徴づけることが可能となる．

6.4 $f(\alpha)$ と D_q との関係

同じ物理量の分布が $f(\alpha)$ でも D_q でも特徴づけられるのであれば，両者は必ず関係しているはずである．これを見てみよう．式（6.2）を（6.11）に代入し，セル i についての和を（6.8）を使って α の積分におき換えると，“分配関数” $Z_q(\varepsilon)$ は

$$Z_q(\varepsilon) = \int d\alpha' \rho(\alpha')\varepsilon^{q\alpha'-f(\alpha')} \tag{6.19}$$

と表される．$\varepsilon \to 0$ の極限ではこの積分は $q\alpha' - f(\alpha')$ が最小となる α' の値で決まる．そこで

$$\frac{d}{d\alpha'}\{q\alpha' - f(\alpha')\} = 0, \qquad \frac{d^2}{d^2\alpha'}\{q\alpha' - f(\alpha')\} > 0 \tag{6.20}$$

をみたす α' を $\alpha(q)$ とすると

$$f'(\alpha(q)) = 0, \qquad f''(\alpha(q)) < 0 \tag{6.21}$$

となる．後の式は $f(\alpha)$ 曲線が上に凸であることを示している．この $\alpha(q)$ を使えば（6.19）は

$$Z_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{q\alpha(q)-f(\alpha(q))} \tag{6.22}$$

と近似でき，（6.12）と（6.13）式より

$$\tau_q \equiv (q-1)D_q = q\alpha(q) - f(\alpha(q)) \tag{6.23}$$

となる．この式の両辺を q で微分して（6.21）を代入すると $\alpha(q)$ が，また（6.23）式そのものから $f(\alpha(q))$ が D_q（あるいは τ_q）を使って

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq}\tau_q \equiv \frac{d}{dq}\{(q-1)D_q\} \tag{6.24}$$

$$f(q) = q\alpha(q) - \tau_q \equiv q\alpha(q) - (q-1)D_q \tag{6.25}$$

と表される．

以上の議論から，一般化次元 D_q が求められていれば，上の２式によって q を媒介変数にして $f(\alpha)$ スペクトルが決定できることがわかった．また，式

(6.21)～(6.25) より，$f(\alpha)$ は $q=0$ で最大値 D_0 をとること ((6.9)) や $\alpha(q=1)=f(q=1)=D_1$ などが容易に導かれる．上式 (6.24) と (6.25) をよく見ると τ_q と $f(\alpha)$ とはルジャンドル変換で結ばれており，熱力学との形式的類似も見えてくるであろう ($q\leftrightarrow\beta$, $\tau_q\leftrightarrow\beta F$, $\alpha\leftrightarrow E$, $f\leftrightarrow S$).

第3節で議論したように，DLA クラスターの成長確率はラプラス場の勾配に比例する ((3.16) 式)．他方，(6.5) 式より導体表面の誘起電荷もラプラス場の勾配に比例する．すなわち，DLA クラスターの成長確率の分布とそのクラスター上の誘起電荷の分布とは全く等価なのである．2次元 DLA クラスターの成長確率の分布に対する一般化次元 D_q および $f(\alpha)$ スペクトルを図13，14に示す．D_q が減少関数であるとか，$f(\alpha)$ が上に凸であるとか，その最大値がサポート (2次元 DLA クラスター) のフラクタル次元 1.7 に近いとか，α の値の範囲が $\frac{1}{2}$ あたりから9近くの大きな値にまでわたっていることなど，予想されたいろいろな特徴がこれらの図から読みとられるであろう．成長確率の D_q, $f(\alpha)$ は樹枝状結晶成長やヴィスカス・フィンガリングなどの実験でも求められている．

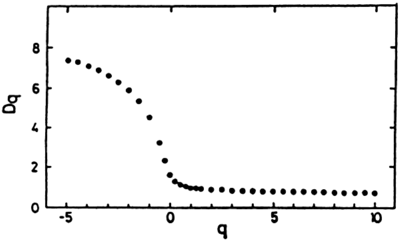


図13　2次元 DLA クラスターの成長確率分布についての一般化次元 D_q

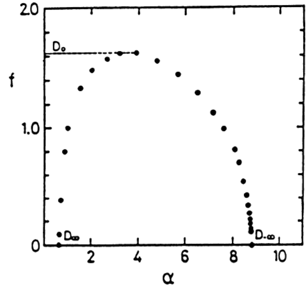


図14　図13と同様の例についての $f(\alpha)$ スペクトル

シェルピンスキー・カーペットやパーコレーション・クラスターのような大小さまざまのループが入り組んだ自己相似パターンの両端に応力や電圧を加えたときの，パターン上の局所的な応力や電位降下の値の分布が決して一

様であり得ないことは容易に想像がつく．これらの量はパターン上で強弱多様に分布し，マルチフラクタルであることが知られている．また，発達乱流のエネルギー散逸率が空間にマルチフラクタル的に分布していることも実験的に調べられている．

6.5　調和測度の情報次元

第3節および上で議論したように，DLA の成長確率はラプラス場の勾配に比例する．したがって，DLA の成長確率分布は調和測度の典型例であり，これまで数多くの数値的研究がなされている．これはまた，成長確率あるいは調和測度がブラウン粒子をプローブ粒子として調べられることをも示す．だとすると，軌跡のフラクタル次元が d_w（$1 < d_w \leq 2$）であるレビー飛行粒子などで成長する場合の，一般化された調和測度にも興味がわく．3.2項で述べた DLA の現象論的議論をこの調和測度に適用すると，d 次元空間中のフラクタル次元 D のパターンの成長確率分布の情報次元を D_1 として

$$D_1 = D - 1 + \frac{d-D}{d_w - 1} \tag{6.26}$$

が導かれる．特にブラウン粒子（$d_w = 2$）をプローブとした通常の調和測度では

$$D_1 = d - 1 \tag{6.27}$$

という簡単な表式で表される．この式は $d = 2$ では数学的に厳密に証明（$D_1 = 1$）されているし，$d = 2, 3$ での計算機シミュレーションの結果ともよく合う．

7°　おわりに

現代科学の特徴を非線形，非平衡，非一様の科学と捉えるならば，フラクタルとカオスはそのパラダイムとなった．どのような分野であれ現代科学を追求する限り，フラクタル，カオスは研究の「道具」として各自の「道具箱」に入れておく必要があろう．最近，特に活発になってきたパターン形成の物

理的研究の観点からは，フラクタルは現象の興味深い一側面を見るための強力な「道具」である．道具は改良や手入れを怠らず，大切にしなければならない．すなわち，現実の多様なパターンを定量的に取り扱いその成長機構を議論するためには，これまで見てきたように，自己相似だけでは枠が狭すぎ，自己アフィン，マルチフラクタルとフラクタルの定義を適当に拡張しなければならない．

しかし，そうはいっても科学にとって最も重要なのは，なぜ多くのパターンがフラクタルで記述できるのか，なぜ自然はフラクタルを好むのか，その成長機構は何なのか，であろう．これまでたびたび強調してきたように，こういった視点からの研究は始まったばかりであり，理論といえばほとんど現象論しかない．逆に言えば，この分野は数理物理学の未解決問題の宝庫なのである．できるだけ多くの若い頭脳の参入によってこの分野が大きく前進することを期待したい．

謝辞：本稿の内容の多くは本田勝也氏をはじめとする多くの方々との共同研究の成果に基づいている．また，早川美徳，脇田順一，中山智雄，森山修の各氏には写真や図版でお世話になった．ここに記して謝意を表する．

参考文献

［1］ J. Feder, *Fractals*, Plenum, New York, 1988.（J. フェダー著，松下 貢・早川美徳・佐藤信一 訳，フラクタル，啓学出版，1991）［物理から見たフラクタル一般の入門書.］

［2］ T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, 2nd Ed. World Scientific, Singapore, 1992.（T. ヴィチェック著，宮島佐介 訳，フラクタル成長現象，朝倉書店，1990）［フラクタル成長現象の物理を詳しく解説．ただし，訳書は初版に基づいており，原著第2版を推奨.］

［3］ T. Vicsek, M. Shlesinger and M. Matsushita (eds.), *Fractals in Natural Sciences*, World Sceintific, Singapore, 1994. ［最新のフラクタル科学の研究に関する会議録を単行本にしたもの.］

第2話

ハミルトン系とカオス

丹羽敏雄

0° はじめに

カオスとは何か？ カオス（混沌）に目鼻がつくとカオスは死ぬという中国の故事に似て，これはある意味で解答不可能な問いである．カオスの定義が定まれば，それはカオスではなくなりカオスは死んでしまう．しかし，少なくとも問題領域を指し示す必要があるから，さしあたり，カオスとは（通常，小自由度の）決定論的システムにおける複雑な挙動としておこう．現実にはカオスとは，学問的に定義されたある領域というより，ある一群の関心領域，あるいは，流行領域ともいうべきものである．もちろん，これは必ずしも悪いことではなく，真に新しい研究領域とはつねにそのようなものであったかもしれない．

ここで決定論的システムに限定したのは，もしシステムに雑音などのようなランダムな外力が作用していれば，その結果，システムの挙動にはランダムな要素が現れるのは当然であるからである．このような場合，カオス的原因にもかかわらず，ある意味でカオス的でない結果——これは多くの場合，平均の結果，つまり統計的な結果であるが，それを抽出することが興味の中心になる．カオスの理論は，いわば，この反対の方向に興味が向かっている，といえるかもしれない．つまり，原因は比較的単純であるにもかかわらず，複雑な結果が生じる現象に興味をもつのである．

カオス理論の対象は，おおまかにいって二つに分けることができる．一つは，本稿ではあまり触れないが，エネルギーが散逸するシステムである．こ

の場合，外力が働かなければ，システムはエネルギーを失い，ついには静止に至ってしまうので，興味は比較的少ない．より興味深い場合は，システムが開かれていて，外部からエネルギーが流れ込む場合である．その場合，システムは，ある過渡的な経過の後，ついには入ってくるエネルギーと出ていくエネルギーがバランスした状態に達する．この一種の動的平衡状態のもとでシステムが示す複雑な状況がカオスであるといえる．流体に見られる乱流は，その意味で最も典型的なカオスであるが，カオスの理論が対象にするのは通常，主として自由度が小さい場合である．

もう一つの対象は，本質的にはエネルギー散逸のないシステムである．大部分のハミルトン系がその典型である．古典的なハミルトン系は，もちろん，決定論的システムであるから，ハミルトン系を考える場合は，カオスとは主として小自由度のシステムが示す複雑な挙動であるということになる．大自由度のハミルトン系の場合，それが複雑であることはいわば自明のこととされており統計力学的対象であった．また小自由度の場合でも，いわゆる“非線形性”があれば，システムは複雑な振る舞いを示すということも暗黙のうちに仮定されていたようである．しかし，有名なコルモゴロフ-アーノルド-モーザ（KAM）の定理により，この暗黙のうちの仮定が必ずしも成り立たないことが示されるに及んで事態は一変する．また，KdV 方程式のような無限自由度の可積分系が発見されるに及び，事態はさらに複雑化するに至った．すなわち，大自由度のシステムであっても解の挙動が単純であり得るのである．ハミルトン系が示す解のカオス的な挙動はブラウン運動が示す複雑さとは異なった性質をもつことも知られるようになった．

前置きはこれぐらいにして本論に入ろう．

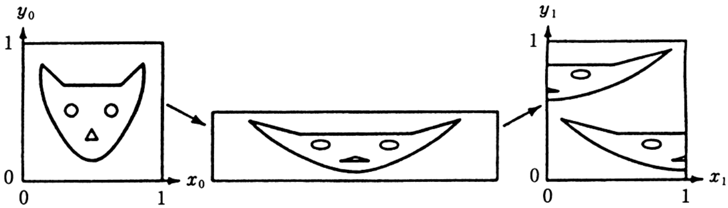
1° パイこね変換

ハミルトン系におけるカオスとは何かを考えるために，よく知られた一つのモデルシステムを考えよう．それはいわゆる**パイこね変換**である．それは次のように定義される．$X=[0,1)^2$ を単位正方形，T を次のように定義される X の変換とする：

$$T: X \to X \qquad T(x, y) = (x', y')$$

$$x' = px \bmod 1, \quad y' = \frac{1}{p}y + \frac{k}{p},$$

$$\text{if } \frac{k}{p} \le x < \frac{k+1}{p},\ k = 0, 1, \cdots, p-1$$



x, y を次のように p 進展開

$$x = 0.x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots, \qquad y = 0.y_1y_2y_3\cdots y_n\cdots$$

$$x_n, y_n = 0, 1, \cdots, p-1$$

すると，$T(P) = (x', y')$ は，

$$x' = 0.x_2x_3\cdots x_n\cdots, \qquad y' = 0.x_1y_1y_2y_3\cdots y_n\cdots$$

で与えられる．

このことをもっとスマートに表すために，いま，一般に点

$$P = (x, y), \qquad x = 0.x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots, \quad y = 0.y_1y_2y_3\cdots y_n\cdots$$

に対して，この二つを“繋ぎ合わせて”次のような**両側無限列** ω をつくる：

$$\omega(P) = \cdots y_n\cdots y_3y_2y_1.x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots$$

両側無限列 $\omega(P)$ を点 P のシンボルという．そうすると，点 $T(P)$ に対する両側無限列，つまり，点 $T(P)$ のシンボルは，

$$\omega(T(P)) = \cdots y_n \cdots y_3 y_2 y_1 x_1 . x_2 x_3 \cdots x_n \cdots$$

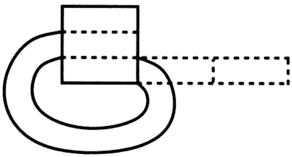
となり，写像 T をほどこすことはシンボルを左側に一つずらすことに対応する．

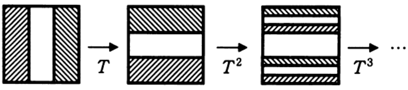
応用上はしばしば上に定義されたパイこね変換の部分系が現れる．それは次のように定義される：

I を $\{1, 2, \cdots, p\}$ の部分集合とする．この I から定まる X の部分集合 X_I を次のように定義する．

$$X_I = \{ (x, y) ; x = 0.x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \cdots,\ y = 0.y_1 y_2 y_3 \cdots y_n \cdots,\ x_n, y_n \in I \}$$

集合 X_I は変換 T で不変な **カントール集合** である．X_I 上に制限した変換 T を部分パイこね変換ということにしよう．部分パイこね変換は“連続的な”変換の部分系としても実現される．有名なスメイルの **馬蹄形力学系** はこの例である．図は $p = 3$，$I = \{1, 3\}$ の場合である．





（部分）パイこね変換はさまざまな意味でカオス的変換の典型であるが，このことからとくに次のことがわかる．

（1）カオスは“情報の喪失”と関連する．

（2）“双曲構造”からカオスが生ずる．

この意味を少し詳しくみていこう．

まず，“(1) カオスとは情報の喪失を意味する”から始めよう．これは無限と有限に関わっている．数学的な無限の立場からいえば，$\omega(P)$ と $\omega(T(P))$ の間には情報量の差があるわけではない．このことはシステムが決定論的であることを意味している．すなわち，現在の状態 P が分かれば，過去と未来にわたってすべての状態を原理的には決定できることを意味している．しかし，有限の立場にたつと，いいかえると，観測という立場にたつと，事情は一変する．すなわち，現在の状態 P を知るといっても，それは近似的にである．いまの場合でいえば，点 P のシンボルのすべてが分かるわけではなく，その一部だけである．たとえば，

$$\omega(P) = \cdots y_n \cdots y_3 y_2 y_1 . x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \cdots$$

とするとき，その一部の

$$[y_{n_0} \cdots y_3 y_2 y_1 . x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n_0}]$$

だけを知り得ることになる．この場合，$k \geq 0$ に対して

$$\omega(T^k(P)) = \cdots y_{n-k} \cdots y_2 y_1 x_1 x_2 \cdots x_k . x_{k+1} \cdots x_{n+k} \cdots$$

であるから，それについて知り得る情報は，$0 < k < n_0$ とすると，

$$[y_{n_0-k} \cdots y_2 y_1 x_1 \cdots x_k . x_{k+1} \cdots x_{n_0} * \cdots *]$$

となり，初めの情報量と比べると明らかに単調に減少していく（$*$は失われた情報である）．とくに，$k > 2n_0$ とすると，k 回後の情報は0になってしまっている．k 回後に知り得る情報は

$$[y_{n_0} \cdots y_2 y_1 x_1 \cdots x_k . x_{k+1} \cdots x_{n_0}]$$

と考えることもできる．この場合ある意味で情報量に増減はない．[注]　たとえ

注）これは，ハミルトン系のような可逆系の特徴である．それに対して，多対1の写像の場合，無限の立場でも情報量は単調に減少する．たとえば，写像

$$T : [0, 1) \to [0, 1) \quad : \quad x' = Tx = 2x \bmod 1$$

を考え，x, x' を2進展開すれば

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \cdots, \qquad x' = 0.x_2 x_3 \cdots x_n \cdots$$

となって，x の情報は確実に失われる．

ば x が“外部”変数，すなわち，見える状態を表し，y が“内部”変数，すなわち，見えない状態を表すとすると，非常に象徴的である．実際いま述べたことは k 回後には，外部変数に関する情報は減少している代わりに内部変数に関する情報はむしろ増加していることを示しているからである．“外部”情報が時間の経過とともに“内部”情報に転化していくのである．“観測され得る情報が観測され得ない情報に繰り込まれていく”といってもよい．この“事実”は，いわゆる**エントロピー増加法則**と密接に関連しているように思われる．このことを，次のようなモデル的無限粒子系でみてみよう．

2° 無限粒子系とエントロピー増加法則

1次元格子上を速度 ± 1 で動く k 種類の粒子を考える．これらの粒子は互いに弾性衝突によって相互作用すると仮定する．このモデルを精確に定義すると次のようになる：$\boldsymbol{Z}$ を整数全体，S を相異なる k（$k \geq 2$）個の色をもった“色”空間とする：$S = \{\phi, c_1, c_2, \cdots, c_k\}$

システムの微視的状態全体からなる相空間 X は

$$X = \{\omega ; \omega : \boldsymbol{Z} \to S \times S\}$$

で表される．X の各要素 ω を

$$\omega(n) = (\omega(n, -), \omega(n, +)) \in S \times S \qquad (n \in \boldsymbol{Z})$$

と書こう．X は積空間と同一視できる：

$$X = \prod_{n \in \boldsymbol{Z}} X_n$$

ここで，$X_n = S_n^- \times S_n^+$，$S_n^- = S_n^+ = S$ である．

システムの時間発展を表す相空間 X の写像 $T : X \to X$ は次のように定義される：

$$T = CT_0$$

ここで，

$$(T_0\omega)(n,\pm) = \omega(n\mp 1,\pm)$$

かつ

$$((C\omega)(n,-),\ (C\omega)(n,+)) = \begin{cases} (\omega(n,+),\ \omega(n,-)) & \omega(n,-)\neq\phi \text{ かつ } \omega(n,+)\neq\phi \text{ のとき} \\ (\omega(n,-),\ \omega(n,+)) & \text{その他の場合} \end{cases}$$

である．力学系 (X,T) の巨視的状態空間 $\mathcal{M}$ は，X 上の確率測度全体である．$\mu\in\mathcal{M}$ の**ボルツマン型のエントロピー** $H(\mu)$ を次のように定義する：

$$H(\mu) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{-1}{2N+1} \sum_{\substack{|n|\leq N \\ \varepsilon=\pm}} \sum_{c\in S} P_\varepsilon^c(n;\mu)\log P_\varepsilon^c(n;\mu).$$

ここで，$P_\varepsilon^c(n;\mu) = \mu\{\omega\,;\,\omega(n,\varepsilon)=c\}$．

次に $\mu\in\mathcal{M}$ の**コルモゴロフ-シナイ（K-S）型のエントロピー** $h(\mu)$ を

$$h(\mu) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{-1}{2N+1} \sum_{A\in\mathcal{U}_N} \mu(A)\log\mu(A)$$

によって定義する．ここで，$\mathcal{U}_N$ は X の $[-N,N]$ 上の分割である．つまり，$\mathcal{U}_N$ は次の形の集合 A への分割である．

$$A = \{\omega\,;\,\omega(n,\varepsilon) = c(n,\varepsilon;A) \quad \text{for } \varepsilon=\pm \text{ and } -N\leq n\leq N\}$$

ここで，$c(n,\varepsilon;A)\in S$．

このとき，次の定理を得ることができる．

定理（エントロピー増加法則）

$\mu\in\overline{\mathcal{M}}$ とするとき，任意の $m\geq 0$ に対して

$$H(T^{m+1}\mu) \geq H(T^m\mu).$$

ここで，

$$\overline{\mathcal{M}} = \{\mu\in\mathcal{M}\,;\,\mu = \bigotimes_{n\in Z}(\mu_n^-\times\mu_n^+)\}$$

である．ただし，$\mu_n^\pm$ はそれぞれ $S_n^\pm$ 上の確率測度である．

K-S型のエントロピーはこれに対して，時間発展に関して不変である：

$$\text{任意の } \mu \in \mathcal{M} \text{ に対して，} h(T\mu) = h(\mu).$$

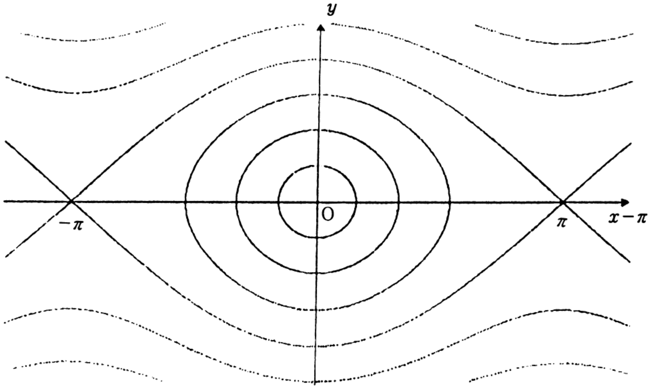
これは，この無限粒子系が可逆であり，数学的な意味での情報は時間発展において失われないことの反映である．にもかかわらず，ボルツマン型のエントロピーが増加するのは，格子上のそれぞれの色の粒子の割合という“観測され得る”外部情報が格子間の相関という“観測され得ない”内部情報に転化していくためである，ということができる．

3°　振り子とその摂動

パイこね変換にみられた双曲構造は“現実的な”力学系にも現れる．たとえば，周期的な小さな外力が加わった振り子の運動を考えよう．ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= \frac{1}{2}y^2 + \cos x - 1 + \varepsilon V(x, \omega t) \\ V(x, \phi + 2\pi) &= V(x, \phi) \end{aligned} \tag{3.1}$$

である．外力がない場合（$\varepsilon = 0$）の相空間上の解曲線の様子はよく知られているように，およそ次の図のようである．まず外力がない場合（$\varepsilon = 0$）を考える．$H(x, y) = 0$ で与えられる解曲線 Γ は**セパラトリックス**といわれ，重要な役割を果たす．それは，不動点 $P_0 = (0, 0)$ の**安定多様体**であると同時に**不安定多様体**にもなっている．



外力が働く（$\varepsilon > 0$）と，この重なっていた安定多様体と不安定多様体は一般的に分離し，互いに横断的に交差するようになる（交点を**ホモクリニック点**という）．この結果，ホモクリニック点の近傍で，先に述べた部分パイこね変換が現れる．そのとき，基礎になるのが次の定理である．

定理　写像 $f: X = [0, 1]^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は次の仮定をみたすとする．

(1)　$\exists H_i : X$ の μ_h-水平帯，$V_i : X$ の μ_v-垂直帯，$i \in S = \{1, 2, \cdots, N\}$ s.t.

H_i（$i \in S$）は互いに交わらず，また V_i（$i \in S$）も互いに交わらない．f は H_i を V_i の上に同相に写す（$f(H_i) = V_i$）．さらに，H_i の水平境界は V_i の水平境界に，H_i の垂直境界は V_i の垂直境界に写る．$0 \le \mu_h \mu_v < 1$

(2)　H は，$\bigcup_{i \in S} H_i$ 内に含まれる μ_h-水平帯とする．このとき，

$$f^{-1}(H) \cap H_i \equiv \widetilde{H}_i$$

はすべての $i \in S$ に対して μ_h-水平帯である．さらに，

ある $0 < \nu_h < 1$ に対して，$d(\widetilde{H}_i) \le \nu_h d(H)$

である．

同様に，V は，$\bigcup_{i \in S} V_i$ 内に含まれる μ_v-垂直帯とする．このとき，

$$f(V) \cap V_i \equiv \widetilde{V}_i$$

はすべての $i \in S$ に対して μ_v-垂直帯である．さらに，

$$\text{ある } 0 < \nu_v < 1 \text{ に対して，} d(\widetilde{V}_i) \le \nu_v d(V)$$

である．

このとき，f は部分パイこね変換をもつ．すなわち，f は不変カントール集合 Λ をもち，f はその上で部分パイこね変換と位相共役である．

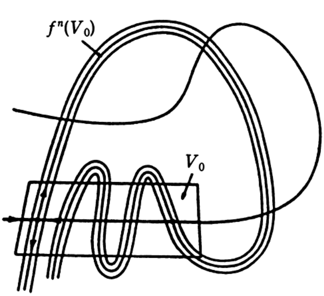
ここで，H が X の μ_h-水平帯であるとは，二つの μ_h-リプシッツ関数 $h_1(x) \le h_2(x)$ によって

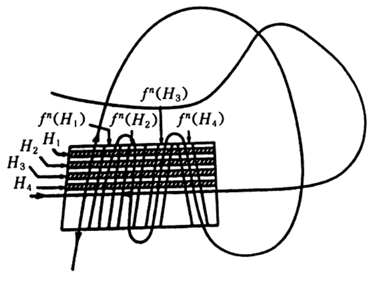
$$H = \{ (x, y) \in X \,;\, 0 \le h_1(x) \le y \le h_2(x) \le 1,\ 0 \le x \le 1 \}$$

と表される集合をいい，また

$$d(H) = \max_{0 \le x \le 1} |h_2(x) - h_1(x)|$$

である．μ_v-垂直帯についても同様である．





初めに述べた事実を示すときに最も重要な点は，不動点の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差すること，すなわち，ホモクリニック点の存在を示すことにある．そのとき用いられる方法は，いわゆるメルニコフ-アーノルドの方法である．以下にそれを少し解説しよう．

4° メルニコフ-アーノルドの方法

次のような周期摂動ハミルトン系を考える（摂動はハミルトン摂動とは限らない）：

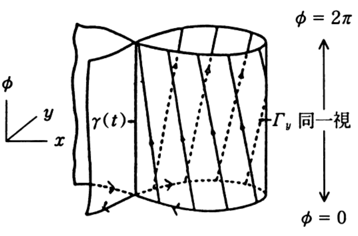
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, \phi, \varepsilon)$$
$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, \phi, \varepsilon), \qquad (x, y, \phi) \in \boldsymbol{R}^2 \times S^1 \tag{4.1}$$
$$\dot{\phi} = \omega$$
$$g_i(x, y, \phi, \varepsilon) = g_i(x, y, \phi + 2\pi, \varepsilon)$$

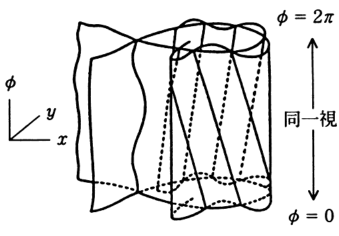
非摂動系（$\varepsilon = 0$）は以下の仮定をみたすとする．

（仮定 1）“ホモクリニック軌道”$q_0(t) \equiv (x_0(t), y_0(t))$ によってそれ自身と結び付けられている双曲型不動点 P_0 をもつ：

$$\lim_{t \to \pm\infty} q_0(t) = P_0$$

（仮定 2）$\Gamma_{P_0} = \{ q \in \boldsymbol{R}^2 \mid q = q_0(t),\ t \in \boldsymbol{R} \} \cup P_0 = W^s(P_0) \cap W^u(P_0) \cup P_0$ とする．Γ_{P_0} の内部は周期 T^α, $\alpha \in (-1, 0)$ をもつ周期軌道 $q^\alpha(t)$ の 1-パラメータ族によって埋められている．$\lim_{\alpha \to 0} q^\alpha(t) = q_0(t)$, $\lim_{\alpha \to 0} T^\alpha = \infty$ を仮定する．ここで，$W^{s[u]}(P_0)$ は不動点 P_0 の［不］安定多様体である．





次の関数を**メルニコフ関数**という：

$$M(t_0, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial H}{\partial x}(q_0(t))g_1(q_0(t),\ \omega t+\omega t_0+\phi_0,\ 0)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial H}{\partial y}(q_0(t))g_2(q_0(t),\ \omega t+\omega t_0+\phi_0,\ 0)\right)dt \qquad (4.2)$$

注意　摂動がハミルトン摂動の場合：

$$g_1 = \frac{\partial H_1}{\partial y}(x, y, t, \varepsilon), \quad g_2 = -\frac{\partial H_1}{\partial x}(x, y, t, \varepsilon)$$
$$H_1(x, y, t, \varepsilon) = H_1\left(x, y, t+\frac{2\pi}{\omega}, \varepsilon\right)$$

のときは，メルニコフ関数は次のようになる：

$$M(t_0, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\{H, H_1\}(q_0(t),\ \omega t+\omega t_0+\phi_0,\ 0)\,dt$$

ここで $\{H, H_1\}$ は H と H_1 のポアソン括弧である．

このとき次の定理が成り立つ．

定理　次の条件をみたす点 $(t_0, \phi_0)=(\bar{t}_0, \bar{\phi}_0)$ が与えられたとする．

i）$M(\bar{t}_0, \bar{\phi}_0) = 0$

ii）$\left.\dfrac{\partial M}{\partial t_0}\right|_{(\bar{t}_0, \bar{\phi}_0)} \neq 0$

このとき，$W^s(\gamma_\varepsilon(t))$ と $W^u(\gamma_\varepsilon(t))$ は，$(q_0(-\bar{t}_0)+O(\varepsilon), \bar{\phi}_0)$ で横断的に交わる．さらに，すべての $(\bar{t}_0, \bar{\phi}_0)\in \boldsymbol{R}^1\times S^1$ に対して，$M(\bar{t}_0, \bar{\phi}_0)\neq 0$ ならば，$W^s(\gamma_\varepsilon(t))\cap W^u(\gamma_\varepsilon(t))=\phi$ である．

ここに，$\gamma_\varepsilon(t)$ は摂動系（4.1）の周期軌道であり（非摂動系の不動点 P_0 から作られる周期軌道 $\gamma_0(t)=(P_0,\ \phi(t)=\omega t+\phi_0)$ を摂動したもの），$W^s(\gamma_\varepsilon(t))$ と $W^u(\gamma_\varepsilon(t))$ はそれぞれ，その安定多様体と不安定多様体である．

例をあげよう．まず，周期的な外力が加わった振り子の場合（3.1）を考えよう．

$$V = \cos x \cos \omega t$$

とする．この場合，よく知られているように，非摂動系のホモクリニック軌道は

$$q_0(t) = (x_0(t), y_0(t)) = \left(2\cot^{-1}(-\sinh t), \frac{2}{\cosh t}\right) \tag{4.3}$$

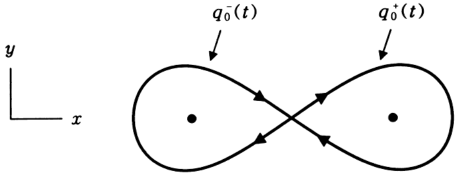
で与えられる．

$$\{H, V\} = -y \sin x \cos \omega t$$

であるから，したがって，そのメルニコフ関数は

$$\begin{aligned} M(t_0, \phi_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{-2}{\cosh t} \sin[2\cot^{-1}(-\sinh t)] \cos(\omega t + \omega t_0 + \phi_0) dt \\ &= -4\sin(\omega t_0 + \phi_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh t}{\cosh^3 t} \sin \omega t \, dt \\ &= \frac{-2\pi\omega^2}{\sinh \frac{\pi\omega}{2}} \sin(\omega t_0 + \phi_0) \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．



もう一つ例をあげよう．減衰強制ダフィング振動子を考える．その方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon(\gamma \cos \phi - \delta y) \\ \dot{\phi} &= \omega \end{aligned} \tag{4.5}$$

これは，$\varepsilon = 0$ に対して，

$$q_0^{\pm}(t) = (x_0^{\pm}(t), y_0^{\pm}(t))$$
$$= (\pm\sqrt{2}\,\mathrm{sech}\,t,\ \mp\sqrt{2}\,\mathrm{sech}\,t\tanh t) \tag{4.6}$$

で与えられるホモクリニック軌道の対をもつ．それらのメルニコフ関数は

$$M^{\pm}(t_0, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty}[-\delta(y^{\pm}(t))^2 + \gamma y^{\pm}(t)\cos(\omega t + \omega t_0 + \phi_0)]dt \tag{4.7}$$

であるから，(4.6) を (4.7) に代入して計算すると，

$$M^{\pm}(t_0, \phi_0) = -\frac{4\delta}{3} \pm \sqrt{2}\,\gamma\pi\omega\,\mathrm{sech}\,\frac{\pi\omega}{2}\sin(\omega t_0 + \phi_0) \tag{4.8}$$

となる．

5° KAM 理論とオブリ-マザー理論

まず簡単に KAM の理論を振り返っておこう．

すでに触れた振り子のような積分可能な系を摂動した次のような系を考えよう：

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \phi, \varepsilon), \qquad I \in D \subset \boldsymbol{R}^d,\ \phi \in \boldsymbol{T}^d \equiv (\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z})^d \tag{5.1}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial I}, \qquad \dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \phi} \tag{5.2}$$

$\varepsilon = 0$ の場合，系はただちに積分可能であって，解は

$$I = I_0, \quad \phi = \omega(I_0)t + \phi_0 \pmod{2\pi}, \quad \omega(I) \equiv \frac{\partial H_0}{\partial I}$$

となる．これは，$\omega(I_0) = (\omega_1, \cdots, \omega_d)$ を振動数とする**多重周期運動**といわれている．この解曲線は不変トーラス $\boldsymbol{T}^d(I_0) \equiv \{(I, \phi) \in D \times \boldsymbol{T}^d ; I = I_0\}$ 上に乗っている．

振動数 $\omega(I_0) = (\omega_1, \cdots, \omega_d)$ が**非共鳴**，すなわち，$\omega_1, \cdots, \omega_d$ が $\boldsymbol{Z}$ 上1次独立であれば，解曲線は不変トーラス上を稠密にみたしている．また逆に共鳴していれば，その共鳴度に応じた低い次元の部分トーラスをみたすことにな

る.

KAM の理論によると，振動数 $\omega(I_0)=(\omega_1,\cdots,\omega_d)$ が十分に非共鳴であるならば，そのような多重周期運動が（十分小さな）摂動によっても破壊されずに保存されることが保証される．すなわち，次の定理が成り立つ：

定理　ハミルトニアン（4.8）は非退化条件：

$$\det\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\neq 0$$

をみたし，十分に滑らかである，すなわち，(I,ϕ) に関して C^r-級 $(r\geq 2d+2)$ であるとする.

このとき，ω が十分に非共鳴，すなわち，ある正の数 γ と ν があって，すべての $\boldsymbol{k}\neq 0\in \boldsymbol{Z}^d$ に対して

$$|(\omega,\boldsymbol{k})|\geq\gamma|\boldsymbol{k}|^{-\nu}$$

をみたすならば，十分に小さな ε に対して，系はトーラス

$$\boldsymbol{T}^d(\omega)\equiv\{(I,\phi)\,;\,I=I_\omega+f_\omega(\Phi),\ \phi=\Phi+g_\omega(\Phi),\ \Phi\in\boldsymbol{T}^d\}$$

を不変にする．ここで，f_ω, g_ω は Φ の滑らかな周期関数で小さい．すなわち，$|f_\omega|, |g_\omega|=O(\varepsilon)$．また，不変トーラス $\boldsymbol{T}^d(\omega)$ 上の運動は ω を周期とする多重周期運動である：$\dot{\Phi}=\omega$.

I_ω は $\omega=\omega(I_\omega)$ によって定まる．上の不変トーラス達は相空間の大部分を占める，すなわち，その補集合の測度は $O(\sqrt{\varepsilon})$ である.

2次元の写像の場合に KAM の定理は最近，マザーとオブリによって次のように拡張された．A を円環とする：

$$A\equiv\{(x,y)\,;\,x \bmod 2\pi,\ 0\leq y\leq 1\}=\boldsymbol{T}^1\times[0,1]$$

$f:A\to A:(x,y)\mapsto(X,Y)$ を次の条件をみたす A の境界を保つ微分同相とする：

（1）f は単調ねじれ写像である：$\dfrac{\partial X}{\partial y}>0$

（2） f はシンプレクティック，すなわち保測かつ向き付けを保つ変換である：

$$f(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$$

（このような写像を **ねじれ写像** という）

定理 $f: A \to A$ をねじれ写像とする．ρ_0, ρ_1 を A の境界上の点の回転数とする．このとき，$\forall \rho \in [\rho_0, \rho_1]$ に対して，次のような（必ずしも連続とは限らない）写像 $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{T}^1 \to A: \theta \mapsto \boldsymbol{h}(\theta) = (x, y) = (x(\theta), y(\theta))$ が存在する：

（1） $f(\boldsymbol{h}(\theta)) = \boldsymbol{h}(\theta+\rho)$

（2） $x(\theta)$ は非減少関数

（3） もし θ が $x(\theta)$ の連続点ならば，$\theta+n\rho, n \in \boldsymbol{Z}$ も連続点である．

（4） もし ρ が無理数ならば，$x(\theta)$ が一定になる区間は存在しない．

ここで，点 $P \in A$ の **回転数** $\rho(P)$ は次のように定義される：

$$\rho(P) = \lim_{n \to \infty} \frac{X(f^n(P))}{n}$$

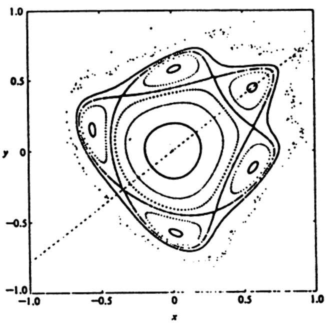
この定理はある意味で，すべての非摂動不変トーラスが摂動後も保存されることを主張するものである．ρ が無理数で，$x(\theta)$ が不連続点をもつ場合はことに興味深い．このとき，条件（3）によって不連続点は稠密に存在し，しかも（2），（3）によって，連続点も稠密に存在する．このとき，

$$C = \{ \boldsymbol{h}(\theta) \in A \,;\, \theta \in [0, \pi] \}$$

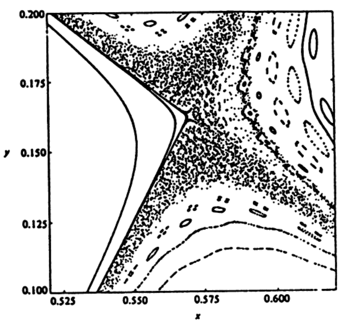
はカントール集合と類似の構造をもち，**カントーラス** と呼ばれている．いずれにしても，これらの“摂動不変トーラス”の存在は，後で述べる，不安定帯における拡散をきわめて緩慢なものにする原因となっている．

6° 不安定帯とアーノルド拡散

さて，可積分系の非共鳴な振動数 ω をもつ多重周期運動は摂動によってわずかに変形されるものの保存されることをみたが，それでは逆に共鳴した振動数をもつ多重周期運動は摂動によってどのようになるであろうか．その行動は，いわゆる**不安定帯**や**アーノルド拡散**といったものと深く関連しており，第3節ですでにみてきたように，図のようなカオス的運動を生み出す原因となっている．



(a)



(b)

(A. Lichtenberg, M. Lieberman : *Regular and Stochastic Motion*, Springer, Appl. Math. Sci. 38 より)

さて，$\omega_0=(\omega_1,\cdots,\omega_d)$ が共鳴度 1 で共鳴している場合，すなわち，

$$\{z\in \boldsymbol{Z}^d\,;\,\omega_0\cdot z\equiv\omega_1 z_1+\cdots+\omega_d z_d=0\}=\{nz_0\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\},\quad z_0\neq 0\in\boldsymbol{Z}^d$$

の場合を考えよう．この場合，非摂動系の不変トーラス $\boldsymbol{T}^d(I_0)$, $\omega(I)=\omega$ は余次元 1 の不変トーラス達からなっている．話を具体的にするために，系のハミルトニアンは

$$H_0(I) = \frac{1}{2}|I|^2, \qquad \omega(I) = I$$

で与えられ，

$$\omega_0 = (0, \omega_2, \cdots, \omega_d), \qquad I_0 = \omega_0$$

とする（$\omega_2, \cdots, \omega_d$ は1次独立）．非摂動系の不変トーラス $\boldsymbol{T}^d(I_0)$ は，

$$\boldsymbol{T}^d(I_0) = \bigcup_{\phi_{10}\in \boldsymbol{T}^1} \boldsymbol{T}^{d-1}(I_0, \phi_{10})$$

$$\boldsymbol{T}^{d-1}(I_0, \phi_{10}) = \{\,(I, \phi)\,;\, I = I_0,\ \phi_1 = \phi_{10}\,\} \simeq \boldsymbol{T}^{d-1}$$

と余次元1の不変トーラス達に分解される．

さて，摂動の不変トーラス $\boldsymbol{T}^d(I_0)$ への影響をみるために，**平均化法**を適用する．平均化されたハミルトニアンは，いまの場合

$$[H] \equiv \int_{\boldsymbol{T}^{d-1}(I_0, \phi_1)} H\, d\phi_2 \cdots d\phi_d$$

$$= H_0(I) + \varepsilon\,[H_1](I, \phi_1, \varepsilon)$$

$$[H_1](I, \phi_1, \varepsilon) \equiv \int_{\boldsymbol{T}^{d-1}(I_0, \phi_1)} H_1\, d\phi_2 \cdots d\phi_d$$

で与えられる．平均化法によると，摂動系の第1次近似は，この平均化されたハミルトニアン $[H]$ をもつ系によって与えられる．この平均化された系は可積分である．実際，

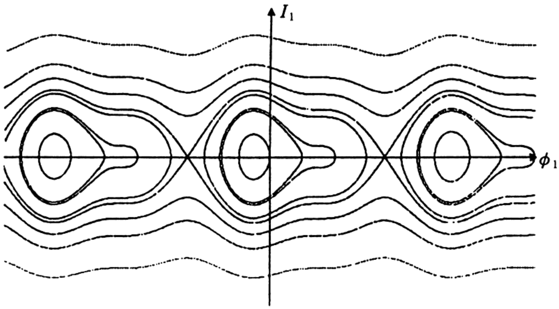
$$\dot{I}_k = \frac{\partial [H]}{\partial \phi_k} = 0 \qquad (k = 2, \cdots, d)$$

であるから，$I_k = c_k$（＝一定）．よって

$$[H] = H_0(I_1, c_2, \cdots, c_d) + \varepsilon\,[H_1]\,(I_1, c_2, \cdots, c_d, \phi_1, \varepsilon)$$

となり，系は自由度が本質的には1である．この系は一般に次の図のように，振り子の場合と同様に“セパラトリックス”をもつ．本来の摂動系は，この平均化された系の摂動と考えられる：

$$H = [H] + \varepsilon(H_1 - [H_1])$$



このことから，第3節とまったく同様に，次元が大きく事情は複雑ではあるが，“セパラトリックス”の分離という現象が生じる．

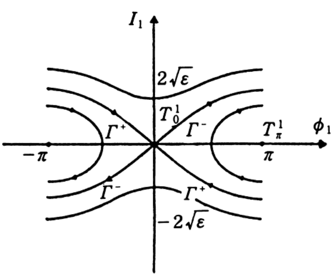
より具体的にみるために，$d=2$ として，

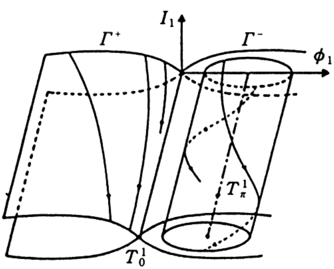
$$H_1(I,\phi) = \varepsilon(\cos\phi_1 - 1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 I_1^2 \cos\phi_2$$

としよう．この場合，$I_0=(0,\omega_2)$，$(\omega_2\neq 0)$

$$[H] = \frac{1}{2}(I_1^2+I_2^2) + \varepsilon(\cos\phi_1 - 1)$$

である．その解曲線は図のようになる．





これを見ると，非摂動系の不変トーラス

$$\boldsymbol{T}^2(I_0) = \bigcup_{\phi_1\in\boldsymbol{T}^1} \boldsymbol{T}^1(I_0,\phi_1)$$

を構成する $\boldsymbol{T}^1(I_0, \phi_1)$ が，$\boldsymbol{T}^1(I_0, 0) \equiv \boldsymbol{T}_0^1(\omega_2)$, $\boldsymbol{T}^1(I_0, \pi)$ を除いて破壊され，$\sim\sqrt{\varepsilon}$ の幅の“島”に膨張したことがわかる．

$$\Gamma^{s[u]}(\omega_2) = \left\{(I, \phi)\ ;\ I_2 = \omega_2,\ [H] = \frac{1}{2}\omega_2{}^2\right\}$$

は $\boldsymbol{T}_0^1(\omega_2)$ の2次元安定多様体であると同時に不安定多様体になっている．摂動，$\varepsilon(H_1 - [H_1])$ の影響により，$\Gamma^s(\omega_2)$, $\Gamma^u(\omega_2)$ が分離するだけでなく，相異なる ω_2 に対する $\Gamma^s(\omega_2)$, $\Gamma^u(\omega_2{}')$ 達が複雑に相互に絡み合うことになる．これが，退化した不変トーラス達が摂動の結果破壊されて生じる，いわゆる“不安定帯”における拡散である，アーノルド拡散の，数学的にもある程度解明された機構である．

具体的には次の定理が成り立つ．

定理（アーノルド）

$$H(I, \phi, t) = \frac{1}{2}(I_1{}^2 + I_2{}^2) + \varepsilon H_1(I, \phi, t)$$

$$H(I, \phi, t) = (\cos\phi_1 - 1) + (1 + \mu(\sin\phi_2 - \cos t))$$

をハミルトニアンとしてもつ系は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して μ を十分小さくとると，次のような解 $I(t)$ をもつ：

任意の $A_1, A_2, \cdots, A_n > 0$ $(\boldsymbol{k} = 1, 2, \cdots, \boldsymbol{n})$ に対して，

$$\exists t_1 < t_2 < \cdots < t_n \text{ があって，} I_2(t_k) = A_k \ (\boldsymbol{k} = 1, 2, \cdots, \boldsymbol{n}).$$

上の定理によって実際に不安定帯に作用変数 I_2 の拡散が生じることが示されたが，その性格はブラウン運動のような確率過程から生じる拡散とは異なっている．ここでは，その拡散の速度が一般にきわめて緩慢なものであることを指摘するだけにしておこう．

定理（ネホロシェフ）

$$H(I, \phi) = \frac{1}{2}|I|^2 + \varepsilon H_1(I, \phi, \varepsilon)$$

をハミルトニアンとするハミルトン系の解 $I(t)$ は ε が十分小さいとき，次の性質をもつ：ある正数 a, b が存在して

$$|t| \leq \varepsilon^{-1}\exp(\varepsilon^{-a}) \text{ に対して，} |I(t)-I(0)| \leq \varepsilon^{b}$$

参考文献

[1] アーノルド（安藤・蟹江・丹羽 訳），古典力学の数学的方法，岩波書店，1980.

[2] アーノルド他（吉田耕作 訳），古典力学のエルゴード問題，吉岡書店，1972.

[3] V.I.Arnold, et al, *Dynamical System III*, Springer, 1988.

[4] A.Lichtenberg, et al, ***Regular and stochastic motion***, Springer, 1983.

[5] 丹羽敏雄，力学系，紀伊国屋書店，1981.

[6] C.L.Siegel, et al, *Lectures on Celestial Mecanics*, Springer, 1971.

[7] Ya.G.Sinai, et al, *Dynamical System II*, Springer, 1989.

[8] S.ウィギンス（丹羽敏雄 監訳），非線形の力学系とカオス，上下，シュプリンガー・フェアラーク東京，1992.

[9] V.M.Alekseev, Quasirandom dynamical systems, I.II.III, *Math. USSR*, **Sb. 5−1** (1968), 73 − 128 ; **6−4** (1968), 505 − 560 ; **7−1** (1969), 1 − 43.

[10] V.I.Arnold, Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, *Sov. Math. Dokl.* **5 (3)** (1964), 581 − 585.

[11] D.F.Escande, Stochasticity in classical Hamiltonian systems : universal aspects, *Physics Reports* **121. 3, 4** (1985), 165 − 261.

[12] J.N.Mather, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus, *Topology* **21** (1982), 457 − 467.

[13] J.Moser, Recent development in the theory of hamiltonian systems, *SIAM Review* **28** (1986), 459 − 485.

[14] N.Nekhoroshev, An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, *Russian Math. Surv.* **32. 6** (1977), 1 − 65.

[15] 丹羽敏雄，近可積分Hamilton系のエルゴード問題，数学（1988），69 − 77.

[16] T.Niwa, On the law of entropy increasing of a one-dimensional infinite system. *J. Math. Kyoto Univ.* (1987), 621 − 633.

[17] T.Niwa, et al, On the law of entropy increasing of a one-dimensional infinite system II. *J. Math. Kyoto Univ.* (1994), 699 − 708.

第3話

ゲージ場の幾何学への誘い

深谷賢治

0° はじめに

この小文では，非可換ゲージ場の数学特に幾何学への応用について述べる．

非可換ゲージ場の数学は，数学の多くの分野と関係がある．またそれは，20世紀中頃までに発展したさまざまな数学の分野の一般化と考えることができる．たとえば，非可換ゲージ場の数学を，調和積分論あるいはコホモロジー論の非可換化と捉(とら)えることは自然である．（この立場での解説を筆者は［7］で述べた．）

本稿では別の視点から述べる．すなわち，非可換ゲージ場の数学を，複素幾何学，特に複素構造や複素ベクトル束のモジュライ空間の理論の，微分幾何学化として解説する．（この二つの視点は実はそれほど違うわけではない．）

いずれにしても，モジュライ空間（moduli space）というのが，非可換ゲージ場の数学の中心テーマである．だから，モジュライ空間とはなにか解説することから始めることにしよう．

1° モジュライ空間とはなにか

1.a 平行四辺形のモジュライ空間

一言でいうと，モジュライ空間とは，ある性質をみたす図形（より一般には数学的対象）の全体の集合を，別の図形・空間だと捉えることである．これは数学では大変重要な考え方であるが，こう述べただけでは抽象的でわか

りづらいであろう．ゲージ理論に現れるモジュライ空間は，ヤン－ミルズ方程式などの偏微分方程式の解の全体の空間である．しかし，これをいきなり解説するのは，やはり難しくなりすぎる．そこでこの節では，ずっとやさしいモジュライ空間を取り上げ，モジュライ空間を考えるとはどういうことか説明しよう．

モジュライ空間として平行四辺形の相似類全体の集合 $\mathcal{M}$ を考えよう．相似類という言葉は，耳慣れないかもしれない．説明しよう．

定義1　A, B を平面図形としたとき，A と B が **相似** であるとは，平面 $\boldsymbol{R}^2$ からそれ自身への全単射 $\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ が存在して，次の条件がみたされることを指す．

（1）　φ は相似変換である．すなわち，φ は直線を直線に写し，また，直線の間の角度を保つ．

（2）　$\varphi(A) = B$

この定義が，中学校で習う定義（二つの平行四辺形 A と B が相似であるのは，辺の長さの比が等しい，すなわち図1で $PQ : P'Q' = PR : P'R' = QS : Q'S' = \cdots$）と同値なことを確かめてほしい．

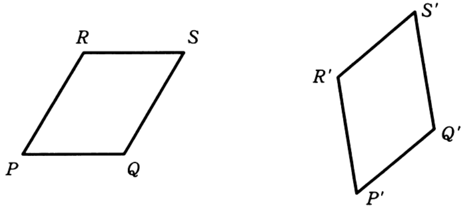


図1　平行四辺形の間の相似

さて，$\mathcal{M}$ を平行四辺形全体の集合とする．ただし，相似な平行四辺形は同じ平行四辺形であるとみなす．（この言葉の意味が曖昧でわかりづらければ，1.b 項を見よ．）$\mathcal{M}$ はどんな形をしているだろうか．

$\mathcal{M}$ の形といっても，変に思うかもしれない．とりあえず定義からは，$\mathcal{M}$ は

ただの集合で,「図形」ではない. その形とは何であろうか. もし集合論のことを知っている読者であれば, 二つの集合が同じである（同型である）とは, その元の数（正確には濃度）が同じであるときである, ということを思いだして, $\mathscr{M}$ は連続濃度であるからたとえば実数の集合と同じである, と考えるかもしれない.

だから, $\mathscr{M}$ を単に集合とみなしても, あまり中身のあることはでてこない. しかし, $\mathscr{M}$ は単に集合とみなせるだけでなく, いくつかの自然な構造をもっている. たとえば, $\mathscr{M}$ には位相が定まる. すなわち, $\mathscr{M}$ の元の列に対して, それが $\mathscr{M}$ の別の元に収束するということが意味をもつ.

それには, 次のように考えればよい. x_i, $i=1,2,\cdots$, を $\mathscr{M}$ の点の列とし, x を $\mathscr{M}$ の点とする. このとき, x_i が x に収束する, つまり $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ であるとは, x_i が表す平行四辺形 A_i が存在し, A_i の4頂点を P_i, Q_i, R_i, S_i とすると, $\lim_{i\to\infty} P_i = P$, $\lim_{i\to\infty} Q_i = Q$, $\lim_{i\to\infty} R_i = R$, $\lim_{i\to\infty} S_i = S$ で, また, P, Q, R, S を4頂点とする平行四辺形が x である, ということを指す. こうして, $\mathscr{M}$ に位相が定まった.

さて, このような構造も込めて, $\mathscr{M}$ はどのような形をしているか, 調べてみよう. $x \in \mathscr{M}$ とする. A を x が表す平行四辺形だとしよう. 相似な平行四辺形は「同じ」とみなしたから, A を拡大・縮小しても「同じ」平行四辺形である. そこで, A を拡大して, 短い方の辺の長さが1であるようにする. 次に, A を動かして, 短い方の辺が2点 $(0,0)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分と一致するようにする (図2).

そのときの, 残りの二つの頂点の位置を考えよう. ここで注意すべきなのは, 与えられた平行四辺形に対して, 短い辺を $(0,0)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分と一致するように置く置き方は, 1通りではないことである. 実際, 図2で示すちょうど4通りの置き方がある.

そこで, 平行四辺形がすべて第1象限 ($x \geq 0$, $y \geq 0$ の部分) に入る, ということを要請しよう. すると, そのような置き方は1通りになる.

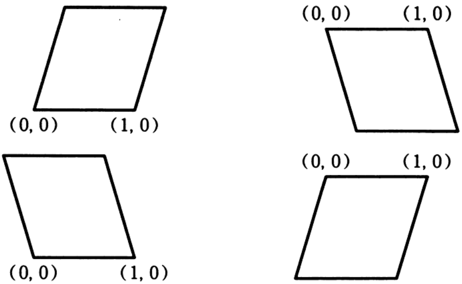


図2　平行四辺形の置き方

平行四辺形をこう置いたとき，第3の頂点（(0, 0) と結ばれている頂点で (1, 0) でないもの）を P とする．すると，P は第1象限の中の原点から距離が1以上である点になる．P を決めれば平行四辺形 A は決まる．（P の座標を (x, y) とすると，第4の頂点の座標は $(x+1, y)$ であるから．）

このようにして，$\mathcal{M}$ の点は，原点からの距離が1以上の第1象限の点に対応することがわかった．逆に，原点からの距離が1以上の第1象限の任意の点に対して，その点に対応する $\mathcal{M}$ の点が存在する．

これを言い換えると，$x \in \mathcal{M}$ を P に対応させることで，$\mathcal{M}$ から集合 $\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \geq 1\}$ への，全単射が得られる．よって，

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \geq 1\} \tag{1.1}$$

とみなしてよいであろう．

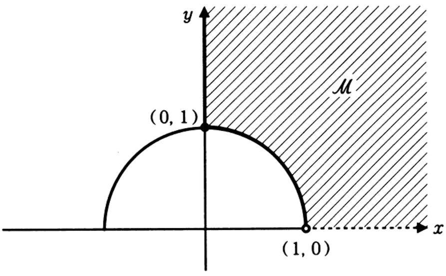


図3　平行四辺形の相似類のモジュライ空間

式 (1.1) の等号は $\mathcal{M}$ がもっているいろいろな構造を保っている．たとえば，前に説明した意味で，$\mathcal{M}$ の点の列 x_i が x に収束していると，x_i に対応する $\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \geq 1\}$ の点 P_i は，x に対応する $\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \geq 1\}$ の点 P に収束する．

式 (1.1) のような記述が見つかった場合には，モジュライ空間が理解できたといってよいであろう．モジュライ空間の研究は，多くの場合，ある種の数学的対象の全体 $\mathcal{M}$ に対して，(1.1) 式の右辺のようなわかりやすい記述を与えることが目的である．

1.b　同値関係と商空間

1.a の考察を振り返ってみると，平行四辺形のモジュライ空間を調べる上での困難が，どんな平行四辺形どうしを「同じ」と見るか，にかかわっていることに気づく．(図 3 で置き方が 4 通りであったり，最初に短い辺の長さを 1 にする，としたりしたのが，(1.1) を得るための考察で中心をなした．)

なにを「同じ」と見るか，というのは，同値関係・商空間といった概念にかかわる．これらは，数学科の課程では 2，3 年ぐらいに習う事がらであるが，実はきわめて難しい概念である．商空間を自由に扱いイメージできたら，プロの数学者になるのに十分な実力があるといってよいであろう．(定義だけするならそれほど難しいわけではないが．)

モジュライの理論でもゲージ理論でも，これらは大切である．(ゲージ理論ではこれは，ゲージ変換群とそれによる商空間として現れる．)

それで 1.a で考えた場合を例に，ここでそれを少し解説しよう．定義 1 (1) では相似変換を考えた．そこで，相似変換全体のなす集合を G と書こう．G は次の性質をもつ．

性質 2

(1)　G の二つの元の合成は G の元である．すなわち，φ_1, φ_2 が相似変換ならば，x を $\varphi_1(\varphi_2(x))$ に写す変換 $\varphi_1 \circ \varphi_2$ も相似変換である．

(2) G の任意の元 φ に対して，その逆変換が存在する．すなわち，φ は全単射である．

(3) $\varphi(x)=x$ なる変換（これを恒等変換という）は G の元である．

このことを指して，G は**群**であるという．さて次に，$\widetilde{\mathcal{M}}$ で平面内の平行四辺形全体の集合を表す．ただし，$\mathcal{M}$ と違って，$\widetilde{\mathcal{M}}$ を考えるときは，二つの平行四辺形が「同じ」であるのは，それが平面の部分集合として一致するときだけとする．つまり，本当に同じ平行四辺形だけ「同じ」とみなす．

さて，$A\in\widetilde{\mathcal{M}}$, $\varphi\in G$ に対して，$\{\varphi(x) \mid x\in A\}$ を $\varphi(A)$ と書こう．つまり，$\varphi(A)$ は相似変換 φ で A を写して得られる平行四辺形である．

すると，次の性質が成り立つ．

性質 3

(1) $\varphi_1, \varphi_2\in G$, $A\in\widetilde{\mathcal{M}}$ に対して，$\varphi_1(\varphi_2(A))=(\varphi_1\circ\varphi_2)(A)$．ここで，$\varphi_1\circ\varphi_2$ は φ_1 と φ_2 の合成であった．

(2) 恒等変換 e に対して，$e(A)=A$．

性質 3 のことを，G は $\widetilde{\mathcal{M}}$ に**作用する**，という．

さて次に，$A, B\in\widetilde{\mathcal{M}}$ に対して，$A\sim B$ で，$\varphi(A)=B$ なる $\varphi\in G$ が存在することを表す．すなわち，A, B が相似であるとき $A\sim B$ と表す．このとき，$\sim$ は次の性質をもつ．

性質 4

(1) $A\sim B, B\sim C$ ならば，$A\sim C$．

(2) $A\sim B$ ならば，$B\sim A$．

(3) $A\sim A$．

このことを，$\sim$ は**同値関係**であるという．（性質 4 は性質 2 と性質 3 から得られる．）さて，以上の言葉を用いると，

$\mathscr{M}$ は $\widetilde{\mathscr{M}}$ の同値関係 ~ についての商（商空間）である

となる．商（商空間）という概念を説明しよう．部分集合 $M \subseteq \widetilde{\mathscr{M}}$ が同値関係 ~ の**完全代表系**であるとは，次のことが成り立つことを指す．

性質5

(1)　どの $A \in \widetilde{\mathscr{M}}$ に対しても，$A \sim A_0$ なる M の元 A_0 が存在する．

(2)　$A, B \in M$，$A \sim B$ ならば，$A = B$．すなわち，M の元どうしは等しくない限り，相似ではない．

ここで1.aでした考察を思いだそう．そこでは，完全代表系 M を具体的に与えていた．すなわち，短い方の辺が $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ線分で，かつ，第1象限に含まれている平行四辺形全体の集合を M と書くと，これに対して性質5が成り立つ，というのが1.aで確かめたことであった．

さて，一般に，集合 X とその上の同値関係 ~ があったとする．M をその完全代表系とする．このとき，M のことを，$\widetilde{\mathscr{M}}$ の ~ による**商（商空間）**と呼び，$\widetilde{\mathscr{M}}/\sim$ と書く．また，$x \in \mathscr{M}$ に対して，$x \sim x_0$ なる M の元 x_0 のことを，x が表す商 $\widetilde{\mathscr{M}}/\sim$ の点と呼ぶ．

同値関係に対して完全代表系のとり方はいろいろある．たとえば，1.aで考えた例では，「短い方の辺が $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ線分で，かつ，第1象限に含まれる平行四辺形全体」のかわりに，「長い方の辺が $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ線分で，かつ，第1象限に含まれる平行四辺形全体」を M としても完全代表系になる．しかし，次のことが成り立つ．

補題6　$\widetilde{\mathscr{M}}$ を集合，~ をその上の同値関係とする．M と M' がともにその完全代表系とすると，M から M' への全単射 $\Phi : M \to M'$ が存在する．

証明　$A \in M$ とする．$A \in \widetilde{\mathscr{M}}$ で M' は完全代表系であるから，性質5 (1) より，$A' \in M'$ で，$A \sim A'$ なるものが存在する．性質5 (2) よりそのような A' はただ一つである．$\Phi(A) = A'$ とおくとこれが全単射であることが容易に

わかる． □

このように，完全代表系を変えても，その間には自然な全単射がある．したがって，商 $\widetilde{\mathcal{M}}/\sim$ を完全代表系 M のことであるといっても意味があるであろう．商（商空間）の定義はこれでいいことにしよう．

ここで注意すべきことが一つある．1.a で考えた例では，完全代表系には，「自然な」とり方があった．しかし，一般にはそうとは限らない．ここに商空間の難しさがある．一つ簡単な例を挙げよう．

X を平面から原点を除いた集合とする．$P, Q \in X$ に対して，$P \sim Q$ を，「P と原点を通る直線と，Q と原点を通る直線が一致するとき，$P \sim Q$」で定義する．このとき完全代表系を探してみよう．

まず，$P \in X$ に対して，$P \sim P_0$ なる P_0 で原点と P_0 の距離が 1 であるものがある．そこで，原点との距離が 1 である点の集合の部分集合として，完全代表系をとることができる．それでは，P, Q がともに原点との距離が 1 で，$P \sim Q$ であるのはどういうときであろうか．これは，定義からすぐにわかるように，$P = Q$ かまたは $P = -Q$ の場合である．そこで，M を

$$M = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \leq \theta < \pi\}$$

と定めれば，完全代表系になることがわかる．右辺の集合は，半開区間 $[0, \pi)$ と 1 対 1 に対応する．それでは，式（1.1）と同様にこの場合

$$X/\sim \;\cong [0, \pi) \tag{1.2}$$

とみなしていいであろうか．これはあまり望ましくないのである．点列 $P_n = \left(\cos\left(\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(\pi - \frac{1}{n}\right)\right)$ を考えてみよう．すると，定義より，$P_n \sim \left(\cos\left(-\frac{1}{n}\right), \sin\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$ である．ところで，$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(-\frac{1}{n}\right), \sin\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = (1, 0)$ である．P_n は（1.2）の対応では，$\pi - \frac{1}{n}$ に対応し，$(1, 0)$ は 0 に対応する．すなわち，この二つは（1.2）の左辺では近いのに，右辺では離れている．すなわち，（1.2）は 1.a で述べた意味では位相を保っていない．

このことは，M を，たとえば $\{(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 < \theta \leq \pi\}$ ではなく，

$\{(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \le \theta < \pi\}$ ととったことに，必然性がないことの結果である．

位相まで考えると実は $X/\sim$ は，半開区間ではなく円周とみなすべきなのである．しかし，そのようにみなせるような自然な完全代表系は存在しない．

上で述べたような理由で，商空間を完全代表系を用いて定義したのは便宜的なことで，本来は，商空間は完全代表系の個々のとり方を離れた意味をもつべきものである．このことは，商空間あるいはモジュライ空間を考える上で大変重要である．いくつかの重要な場合で，X はやさしすぎて面白くないが，商空間 $X/\sim$ 自身は深くて面白いということが起こる．上に述べたことがその理由なのである．

1.c　モジュライ空間の特異点

1.b では，定義にかかわる抽象的なことにかまけてしまった．せっかく 1.a で平行四辺形のモジュライ空間を求めたから，これをもう少し考察しよう．やさしいことをやっているように見えるが，1.c と 1.d で述べるような考察（それから式（1.1）のような記述を見つけること）がモジュライ空間の研究の中心なのである．

平行四辺形の相似類のモジュライ空間の図3を見ると，モジュライ空間の点の中には，その点のまわりの様子が，普通の点と違う特別な点があることがわかる．そのような点を特異点という．具体的には，下の図4で，X, Y, Z と

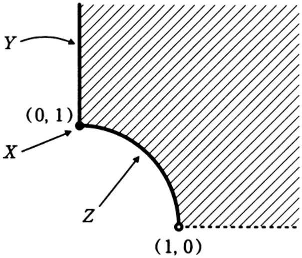


図4　モジュライ空間の特異点

示した部分が特異点に当たる．

さて，特異点はどういう平行四辺形に対応しているのだろうか．定義に戻ってみればわかるように，X の点は正方形，Y の点は長方形，Z の点はひし形に当たる．これらの図形の特徴は，普通の平行四辺形より対称性が高いことである．より正確に書けば次のようになる．$A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ に対して，$\varphi(A)=A$ なる相似変換 $\varphi \in G$ を考えよう．すなわち，A を A 自身に写す相似変換を考える．普通の平行四辺形に対しては，そのような相似変換は二つだけである．つまり，恒等変換と重心のまわりの180度回転である．

それ以外にも A を A 自身に写す相似変換があるような A がちょうど，正方形・長方形・ひし形なのである．実際，たとえば正方形の場合は，重心のまわりの90度回転などが自分自身に写す相似変換で，またひし形の場合には，向かい合った頂点を結ぶ軸に対する対称移動がそれである．すなわち

観察7　モジュライ空間の特異点に対応する図形は，普通の点に対応する図形より対称度が高い．

このことは，いまの問題にかぎらず，一般に成立する原理である．

1.d　モジュライ空間のコンパクト化

式 (1.1) の右辺をもう一度見てみよう．これは平面の部分集合であるが，境界は一部が含まれていて，一部は含まれていない．具体的には x 軸上の点は (1.1) の領域の境界に含まれているが，(1.1) には含まれていない．この点をどのように解釈したらよいであろうか．

たとえば，点 $(2,0)$ を考えよう．この点に近づく，(1.1) の集合の中の点の列 $\left(2, \dfrac{1}{n}\right)$ を考えよう．この点に対応する平行四辺形を順に書いていくと，n を大きくするに従ってそれはだんだんひしゃげていく（図5）．そこで，$n \to \infty$ の極限では，それは，図6のようなつぶれた図形になると考えてよいであろう．

このように，モジュライ空間の境界点を表す図形，を考えることができた．

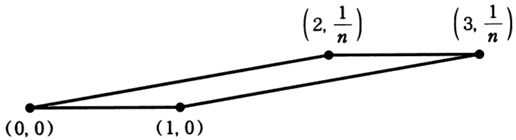


図5　境界に近づく



図6　境界の点に対応する図

境界点以外にも「無限遠点」も同じように解釈できる．

すなわち，P_n を（1.1）右辺の図形上の点の列で，P_n と原点との距離が無限大に発散するとしよう．このとき，P_n に対応する平行四辺形はどのような図形に近づくであろうか．P_n に対応する平行四辺形は，とりあえず，一辺の長さは 1 で，もう一つの辺の長さは P_n と原点との距離に等しい．後者は無限大に発散する．そこで，（相似な平行四辺形どうしは「同じ」とみなしていたのだから），この平行四辺形を縮小し，長い方の辺を 1 にしてみよう．すると，短い方の辺の長さはどんどん 0 に近づく（図 7）．

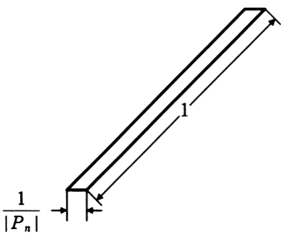


図7　無限遠点に対応する図形

ゆえにその極限は一辺の長さが 0 になった「平行四辺形」と考えられる．このようにして，「無限遠点」に対応する図形もやはり退化した（つぶれた）平行四辺形とみなせる．（前の場合とつぶれ方が違うが．）

式（1.1）右辺の図形に境界点と無限遠点をつけ加えると，図形はコンパク

トになる．（すなわち，任意の点列が収束部分列をもつようになる．）初めはコンパクトでなかった図形に，余分の点を加えてコンパクトにすることは**コンパクト化**と呼ばれている．この項で述べたことは，

観察8　モジュライ空間に退化した図形に対応する点をつけ加えることでコンパクト化ができる．

とまとめることができる．これも，一般に通用する原理である．

2° リーマン面とモジュライ空間

2.a　曲面の複素構造のモジュライ空間

前の節では，話をやさしくするために，それ自身ではさして重要でない例を使って説明した．この節からは，数学の研究で実際に現れるモジュライ空間について述べることにしよう．

モジュライの問題を初めて考えたのは，リーマンであろう．リーマンが考えたのは，リーマン面のモジュライの問題である．次のような定理（リーマンの写像定理）がある．

定理9　複素平面 $\boldsymbol{C}$ に含まれる領域 Ω に対して，$\Omega \neq \boldsymbol{C}$ で，Ω が単連結ならば，Ω は単位円盤 $D^2 = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| \leq 1\}$ と複素同型である．

定理で使った言葉を説明しよう．Ω が**単連結**とは（この場合は）補集合 $\boldsymbol{C} \setminus \Omega$ が弧状連結なことと同値である．また，Ω が D^2 と**複素同型**とは，Ω 上の定義された正則関数 φ が存在して，φ が Ω と D^2 の間の全単射を与えることをいう．（正則関数とは，各点（下の式では a）のまわりで

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

のように，ベキ級数に展開できる関数を指した．正確な定義は，複素関数論の書物を見よ．）

たとえば，$\Omega = \{ z \in \boldsymbol{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ であれば，

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

とおけば，これが Ω と D^2 の間の全単射を与える正則関数である．

さて，定理9が主張することは，だいたい，単連結な領域の複素構造はただ一つである，ということである．（これ以後複素構造という言葉を何回か使うが，正確な定義はしない．複素同型の定義の中で，全単射である正則関数 φ で写るものを複素同型と定義して，たとえば，連続な全単射で写るものは複素同型としなかった．これが複素構造を考えていることに当たる．）

同じことが，単連結でない領域に対して成り立つだろうか．$0 < r < 1$ に対して，

$$\Omega_r = \{ z \in \boldsymbol{C} \mid r \leq |z| \leq 1 \}$$

とおこう．次のことが知られている．

定理10　$r \neq r'$ ならば，Ω_r と $\Omega_{r'}$ は複素同型でない．

また，複素平面 $\boldsymbol{C}$ に含まれる，領域 Ω に対して，補集合 $\boldsymbol{C} \setminus \Omega$ が，ちょうど二つの弧状連結な開集合の，互いに交わらない和になれば，$0 < r < 1$ が存在して，Ω は Ω_r と複素同型である．

Ω_r のような図形のことを**アニュラス**という．定理10は，アニュラス上の複素構造が，開区間 $(0, 1)$ の元と1対1に対応することを示している．すなわち，

「アニュラス上の複素構造のモジュライ空間は $(0, 1)$ である．」

これまでは，複素平面上の領域を考えてきた．もっと面白いのは，（閉じた）曲面上の複素構造のモジュライ空間である．例として，トーラスの場合を考えてみよう．

トーラスとは浮輪の表面のような曲面を指す（図8）．この上に複素構造を与えるには，次のようにする．τ_1, τ_2 を0でない複素数とする（比 τ_1/τ_2 は実数

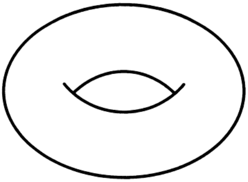


図8　トーラス

でないとする)．$\boldsymbol{C}$ 上の同値関係 ~ を，

$$w=z+n_1\tau_1+n_2\tau_2 \text{ であるとき，} z \sim w \tag{2.1}$$

で定義する．商空間 $\boldsymbol{C}/\sim$ はトーラスで自然に複素構造をもつ．

もう少し平たくいうと次のようになる．0，τ_1，τ_2，$\tau_1+\tau_2$ の4点を頂点とする平行四辺形を考えよう（図9）．この平行四辺形で，0，τ_1 を結ぶ辺と τ_2，$\tau_1+\tau_2$ を結ぶ辺，および，0，τ_2 と τ_1，$\tau_1+\tau_2$ を結ぶ辺を貼る．すると，トーラスができる．このようにしてできたトーラスを，複素構造も含めて，$T(\tau_1, \tau_2)$ と書くことにしよう．

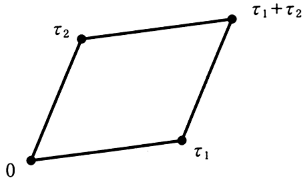


図9　トーラス上の複素構造

いつ，$T(\tau_1, \tau_2)$ と $T(\tau_1', \tau_2')$ は複素同型になるであろうか．（トーラス上の二つの複素構造が複素同型になるということの定義は，省略する．）

この条件は，0，τ_1，τ_2，$\tau_1+\tau_2$ を4頂点とする平行四辺形と，0，τ_1'，τ_2'，$\tau_1'+\tau_2'$ を4頂点とする平行四辺形とが相似であるための条件とよく似ている．異なるのは次の2点である．

（甲）　0，τ_1，τ_2，$\tau_1+\tau_2$ を4頂点とする平行四辺形 A が図10（1）で，0，τ_1'，τ_2'，$\tau_1'+\tau_2'$ を4頂点とする平行四辺形 B が図10（2）であるとき

は，この二つの平行四辺形は相似であるが，$T(\tau_1, \tau_2)$ と $T(\tau_1', \tau_2')$ は複素同型ではない．

（乙）$T(\tau_1, \tau_2)$ と $T(\tau_1, \tau_2+\tau_1)$ は複素同型であるが，0, τ_1, τ_2, $\tau_1+\tau_2$ を4頂点とする平行四辺形 A と，0, τ_1, $\tau_2+\tau_1$, $2\tau_1+\tau_2$ を4頂点とする平行四辺形 B は相似ではない．

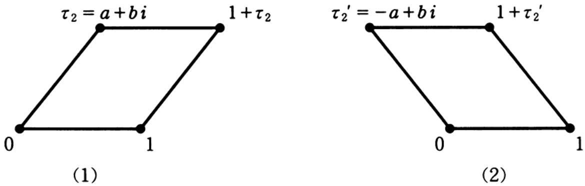


図10　複素同型でないトーラス

（甲）の理由は，$z=x+iy$ を $-x+iy$ に写す写像（これが，A を B に写す相似変換である）が正則関数でないことである．

（乙）の理由．$T(\tau_1, \tau_2)$ は A のお互いに平行な2組の辺をそれぞれ貼り合わせて得られる．$T(\tau_1, \tau_2+\tau_1)$ も同様である．そこで，図11を見てみよう．$T(\tau_1, \tau_2)$ は二つの三角形アとイを a, b の2か所で貼り合わせて得られる．一方，$T(\tau_1, \tau_2+\tau_1)$ は二つの三角形イとウを a, c の2か所で貼り合わせて得られる．三角形アとウは合同であるから，この二つは，貼る順番を変えただけで，同じものである．

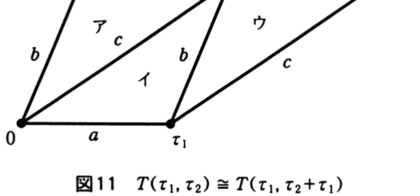


図11　$T(\tau_1, \tau_2) \cong T(\tau_1, \tau_2+\tau_1)$

2.b リーマン面上のモジュライ空間

2.a では，リーマン面の複素構造のモジュライ空間を考えた．この一般化に当たるのが，（高次元の）複素構造のモジュライの理論である．複素構造のモジュライの理論あるいは変形理論を建設したのは，小平邦彦と D. Spencer で，1950年代のことである．小平らの研究は，調和積分論すなわち（たとえば複素多様体の上の）線形楕円型方程式の研究に引き続いて行なわれ，そこでは楕円型偏微分方程式が主要な役割を果たした．

リーマン面やより一般の複素多様体のモジュライの理論は，対応する物理の理論では重力場の理論に当たる．なぜなら，たとえば 2.a で考えたモジュライ空間は，トーラスなどのそれ自身の幾何学（あるいは曲がり方）を記述するものであり，空間の曲がり方が重力を生むというのがアインシュタインの重力理論（一般相対性理論）であるからである．

それに対して，ゲージ場の理論の数学が，楕円型方程式論と結びついて発展を始めるのは1970，80年代であった．

しかし，それより前にも，ゲージ理論に当たるもので，代数幾何学あるいは複素多様体論で，重要な（主要な）位置を占めるものがあった．因子と直線束の理論がそれである．これらは，可換ゲージ理論に対応する．

非可換ゲージ場について述べる前に，リーマン面上の因子のことを解説しよう．話を簡単にするため，いちばんやさしいリーマン球面の場合から始める．

∞ という記号を考え，集合 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ を考える．これを **リーマン球面** と呼び，以後 $\boldsymbol{CP}^1$ と書く．$\boldsymbol{CP}^1$ の **因子**（Divisor）とは，有限個の点 $p_1, \cdots, p_k \in \boldsymbol{CP}^1$ と整数 $n_1, \cdots, n_k$ を用いて，

$$D = n_1p_1 + \cdots + n_kp_k$$

のような形式的な和に表されるものを指す．因子 $D = n_1p_1 + \cdots + n_kp_k$ に対して，整数 $n_1+\cdots+n_k$ をその **次数** と呼び，$|D|$ または $\deg D$ と表す．

有理型関数 f とは，各点のまわりで $f = \dfrac{\varphi}{\psi}$ のように正則関数の比で表され

る関数を指す．$\psi(z)=0$，$\varphi(z)\neq 0$ である点 z では f の値は無限大と考える．リーマン球面上の有理型関数は多項式の比

$$f(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_{n-1}z+b_n} \tag{2.2}$$

で表されることが知られている（これを有理関数と呼ぶ）．

f を有理型関数とし，1点 p のまわりで $f=\dfrac{\varphi}{\psi}$ と表せたとする．$\varphi(z)=(z-p)^k h(z)$，$\psi(z)=(z-p)^l g(z)$，$h(p)\neq 0$，$g(p)\neq 0$ と表したとき，$k-l$ のことを f の p での **オーダー** と呼ぶ．$k-l>0$ ならば $f(p)=0$ で，$k-l=0$ ならば $f(p)\neq 0$，$k-l<0$ ならば $f(p)=\infty$ である．

（1変数）正則関数が0である点は，考えている空間がコンパクトならば，有限個であることが知られている．したがって，オーダーが0でない点は有限個である．

そこで，有理型関数 f に対して，その定める因子 (f) を次のように定義する．p での f のオーダーを $\mathrm{ord}_p(f)$ と書くと

$$(f)=\sum_{\mathrm{ord}_p f\neq 0}\mathrm{ord}_p f[p] \tag{2.3}$$

リーマン球面上の有理関数 f に対しては，(f) は次のように計算できる．まず (2.2) のように f の分母と分子が同じ次数とすると，(2.2) の右辺を因数分解して

$$f(z)=c\frac{(z-p_1{}')\cdots\cdots(z-p_n{}')}{(z-p_1)\cdots\cdots(z-p_n)}$$

と表せる．すると，

$$(f)=p_1{}'+\cdots+p_n{}'-(p_1+\cdots+p_n)$$

である．もし分母の方が次数が高く，たとえば $f(z)=c\dfrac{(z-p_1{}')\cdots\cdots(z-p_m{}')}{(z-p_1)\cdots\cdots(z-p_n)}$，$m<n$ とすると，

$$(f)=p_1{}'+\cdots+p_m{}'+(n-m)\infty-(p_1+\cdots+p_n)$$

と考える．（この場合，f の無限遠点での値は0である．）　また，

$$f(z)=c\frac{(z-p_1')\cdots\cdots(z-p_n')}{(z-p_1)\cdots\cdots(z-p_m)},\ m<n \text{ とすると,}$$

$$(f)=p_1'+\cdots+p_n'-(p_1+\cdots+p_m+(n-m)\infty)$$

である.（この場合 f の無限遠点での値は ∞ である.）さて，次の定理は明らかであろう.

定理 11　リーマン球面上の次数が 0 の任意の因子 D に対して，$D=(f)$ なる有理型関数 f が存在する.

次に，定理 11 をトーラスの場合に拡張するとどうなるか考えよう．トーラス $T(\tau_1,\tau_2)$ に対して，$T(\tau_1,\tau_2)$ 上の正則関数とは，複素平面上の正則関数 f であって，τ_1,τ_2 を周期にもつもの，つまり

$$f(z+\tau_1)=f(z+\tau_2)=f(z) \tag{2.4}$$

をみたすものを指す．また，$T(\tau_1,\tau_2)$ 上の有理型関数とは，(2.4) をみたす f であって，各点のまわりで $f=\dfrac{\varphi}{\psi}$ なる商に書けるものを指す．(2.4) より，$z'\doteq z+n\tau_1+m\tau_2$（$n,m$ は整数）であれば，f の z でのオーダーと z' でのオーダーは一致する．つまり，$T(\tau_1,\tau_2)$ 上の点に対して，その点での f のオーダーが意味をもつ．よって，(2.3) 式で f の定める因子 (f) が定まる．ここで，トーラス $T(\tau_1,\tau_2)$ 上の因子とは，$p_i\in T(\tau_1,\tau_2)$，整数 n_i を用いて，$D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$ なる形式的な和で表されるものを指す.

このとき定理 11 と同じ主張は成立しない．すなわち，任意の次数が 0 の因子が (f) という形で表されるわけではない．かわりに成立するのが次の定理である.

定理 12　トーラス上の次数が 0 の因子 $D=([z_1]+\cdots+[z_n])-([z_1']+\cdots+[z_n'])$ に対して，$D=(f)$ なる有理型関数 f が存在するための必要十分条件は

$$z_1+\cdots+z_n-z_1'-\cdots-z_n'\sim 0$$

である.

定理12の記号の意味を復習しておこう．z_i は複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の点で $[z_i]$ はそれが表す商空間 $T(\tau_1, \tau_2)$ 上の点である．（$T(\tau_1, \tau_2)$ は $\boldsymbol{C}$ の（2.1）の定める同値関係 $\sim$ による商空間であった．）定理の条件 $z_1+\cdots+z_n-z_1'-\cdots-z_n' \sim 0$ は

$$z_1 + \cdots + z_n - z_1' - \cdots - z_n' = n\tau_1 + m\tau_2$$

なる整数 n, m が存在することを指した．

定理12を使うとトーラス上の因子のモジュライ空間が計算できる．トーラス上の因子のモジュライ空間を定義しよう．二つの因子 $D_1 = n_1p_1+\cdots+n_kp_k$, $D_2 = m_1q_1+\cdots+m_lq_l$ に対して，その和を

$$D_1 + D_2 = n_1p_1 + \cdots + n_kp_k + m_1q_1 + \cdots + m_lq_l$$

で定める．ただし，$p_i = q_j$ のとき，$n_ip_i+m_jq_j$ は $(n_i+m_j)p_i$ のこととみなす．差についても同様に定義する．

二つの因子 D_1, D_2 に対して，二つが同値（**有理同値**という）である（記号で表すと $D_1 \sim D_2$）とは，$D_1-D_2=(f)$ なる有理型関数 f が存在することを指す．

リーマン面（たとえばトーラス）Σ に対して，Σ 上の次数 d の因子のモジュライ空間 $\mathcal{M}(\Sigma, d)$ とは，商空間 $\widetilde{\mathcal{M}}(\Sigma, d)/\sim$ を指す．ここで，$\widetilde{\mathcal{M}}(\Sigma, d)$ は次数 d の因子全体の集合で，$\sim$ は上で定義した同値関係である．

この言葉を用いると，定理11は，$\mathcal{M}(\boldsymbol{CP}^1, d) = \{一点\}$ と表される．（これは明らかであろう．）一方，定理12は $\mathcal{M}(T(\tau_1, \tau_2), d) = T(\tau_1, \tau_2)$ と表される．このことを説明しよう．

$\widetilde{\mathcal{M}}(T(\tau_1, \tau_2), d)/\sim$ の完全代表系を求めよう．トーラスは商空間 $T(\tau_1, \tau_2) = \boldsymbol{C}/\sim$ であった．その完全代表系を M とする．これを用いて，$X \subset \widetilde{\mathcal{M}}(T(\tau_1, \tau_2), d)$ を

$$X = \{\,[z] + (d-1)[0] \mid z \in M\,\}$$

で定義する．次のことを示せば，$\mathcal{M}(T(\tau_1, \tau_2), d) = T(\tau_1, \tau_2)$ が示されたことになる．

補題13　X は $\widetilde{\mathcal{M}}(T(\tau_1, \tau_2), d)$ 上の同値関係 ～ の完全代表系である．

証明　$D = n_1p_1 + L + n_kp_k \in \widetilde{\mathcal{M}}(T(\tau_1, \tau_2), d)$ を任意の元とする．$p_i = [z_i]$，すなわち $p_i \in T(\tau_1, \tau_2)$ を表す複素数を z_i とする．$z = n_1z_1 + \cdots + n_kz_k$ とし，$[z] + (d-1)[0] \in X$ を考える．定理12より，$D - ([z] + (d-1)[0]) = (f)$ なる有理型関数 f が存在する．よって，$D \sim [z] + (d-1)[0]$．すなわち，性質5（1）が成立する．性質5（2）も，定理12から容易にわかる．□

以上で，「トーラスの因子のモジュライ空間を決定する」という問題が，「(2重）周期・零点・無限大になる点を与えられたとき，そのような有理型関数がいつ存在するかを決める」という複素関数論の具体的な問題と同値であることを説明した．

因子のモジュライ空間は，トーラスより一般のリーマン面に対しても計算されている．図12のように穴の g 個あいた曲面（に複素構造を考えたもの）を種数（ジーナス）g の **リーマン面** という．

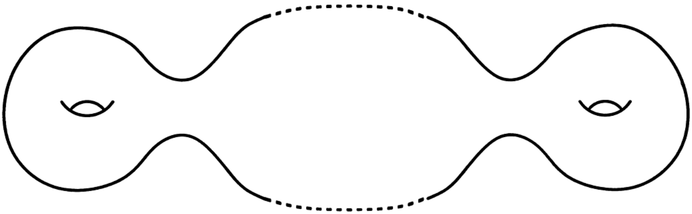


図12　リーマン面

定理14　種数 g のリーマン面 Σ_g 上の，次数 d の因子のモジュライ空間 $\mathcal{M}(\Sigma_g, d)$ は，$2g$ 次元のトーラス T^{2g} である．

$2g$ 次元のトーラスとはなにかを説明するのはやめる．$g=1$ のときは，Σ_g はトーラスで，モジュライ空間 $\mathcal{M}(\Sigma_1, d)$ は2次元のトーラス，つまり普通のトーラスである．$\mathcal{M}(\Sigma_g, d)$ のことを Σ_g の **ヤコビ多様体** という．

定理14は19世紀にリーマン，ヤコビ，アーベルらによって展開されたリーマン面の理論の中心の一つである．これを説明するのは，ここではあきらめて，この高次元化＋微分幾何学化がどうしてゲージ場の幾何学なのかを，次の節で説明したい．

3° 複素ベクトル束とゲージ理論

3.a　因子と直線束

第2節特に2.bの内容を多変数の複素関数に一般化するにはどうしたらよいであろうか．そのためには，高次元の複素多様体という概念が必要になる．

たとえば複素2次元の複素多様体，すなわち**複素曲面**とは，4次元の図形Mで，M上での関数が正則であるということが意味をもつ図形のことである．（複素1次元の複素多様体とは，リーマン面のことで，それは，2次元で，その上で関数が正則であるということが意味をもつ図形を指した．）複素曲面のいちばんやさしい例は，複素数の組全体 $\boldsymbol{C}^2=\{(z_1,z_2)\mid z_1,z_2\in\boldsymbol{C}\}$ であるが，これは幾何学的にはあまり面白いものではない．ここでは，複素多様体の他の例を挙げるのはやめる．

さて，2.bで述べた因子という概念を複素曲面Mに一般化するには，どうしたらよいであろうか．それには二つの考え方がある．

一つは，そのままに定義する．すなわち，「因子とは $D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$ と表せ，$p_i\in M$，n_i は整数であるものを指す」とするのである．しかし，普通は $D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$ のようなものは，因子とは呼ばない．このようなものについては3.bで考えよう．

複素曲面の場合に $D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$ を因子とは呼ばないのは，そうしてしまうと，2.bで中心的であった，有理型関数が定める因子という概念が，一般化されないからである．そこで，複素曲面の場合に，有理型関数fから出発して，2.bのまねをするとどうなるかを考えてみよう．

M 上の有理型関数 f とは，各点のまわりで正則関数の正則関数による商 $f=\dfrac{\varphi}{\psi}$ で表される関数である．リーマン面とまず違うのは，f が 0 になる点の集合が，有限個の点にならないことである．実際 f が 0 になる点の集合は φ が 0 になる点の集合であるが，これは，M が 4 次元であるから，$4-2=2$ 次元の図形である．

したがって，$D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$ のかわりに，$D=n_1C_1+\cdots+n_kC_k$（C_i は 2 次元の図形）を考える必要がある．（ただし，C_i はただの 2 次元の図形ではなく，複素解析空間となっている必要がある．この言葉は後で少し説明する．）そのようなものが，複素曲面の因子と呼ばれる．

因子のモジュライ空間が第 2 節同様に定義される．定理 14 の一般化は，次のようになる．

定理 15　複素多様体 M の因子のモジュライ空間は $2b_1$ 次元のトーラスである．ここで b_1 は 1 次元コホモロジー群のランク（第 1 ベッチ数）である．

定理の用語の説明はしない．

3.b に話を進めるために，因子のモジュライ空間とベクトル束（ここでは直線束）のモジュライ空間との関係を説明しておこう．

そのために，複素曲面上の因子の定義の言い換えをする．（複素曲面上の因子のちゃんとした定義はしていなかったから，次にする説明の方が因子の定義と思ってもよい．）

$D=n_1C_1+\cdots+n_kC_k$（C_i は 2 次元の図形）をどのように与えるか考えよう．ある点 p の近くで考えると，C_i はある一つの複素数値関数による方程式

$$f_{i,p}(x) = 0$$

で表される．ここで，C_i が「複素解析空間」であるとは，関数 $f_{i,p}$ が正則関数であるという意味である．さて，そこで，

$$f_p = (f_{1,p})^{n_1}\cdots(f_{k,p})^{n_k}$$

とおこう．（$n_i<0$ かもしれないから，f_p は有理型関数である．）

次に，q が p の近くの点とする．このとき，比 $g_{pq}=f_p/f_q$ を考えよう．$f_{i,p}$ が 0 になるのと，$f_{i,q}$ が 0 のなるのは同値だから，定義に従って考えると，$g_{pq}=f_p/f_q$ は決して 0 にも無限大にもならない．

逆に，各点のまわりで有理型関数 f_p が与えられ，比 $g_{pq}=f_p/f_q$ が決して 0 にも無限大にもならなければ，因子が定まる．

注意　異なった f_p たち（たとえば f_p と f_p'）が同じ因子を定める場合もある．定める因子が同じであるための条件は，f_p/f_p' が決して0にも無限大にもならないことである．

このようにして因子を定めるやり方がわかった．ここで，因子のかわりにベクトル束を考えるとは，f_p の方は忘れて，$g_{pq}=f_p/f_q$ の方だけを考えることに対応する．

g_{pq} は次の関係式をみたす．

$$g_{pq}g_{qr}=g_{pr} \tag{3.1}$$

実際，

$$g_{pq}g_{qr}=\frac{f_p}{f_q}\frac{f_q}{f_r}=\frac{f_p}{f_r}=g_{pr}$$

(3.1) をみたすような，決して 0 および無限大にならない正則関数 g_{pq} が与えられたとき，**複素直線束** (complex line bundle) が与えられた，という．

もちろん，g_{pq} からは，f_p は決まらない．したがって，対応する因子 $D=n_1C_1+\cdots+n_kC_k$ も決まらない．しかし，次のことが成り立つ．

補題16　同じ g_{pq} に対応する因子 $D=n_1C_1+\cdots+n_kC_k$ どうしは ~ の意味で同値である．

実は，さらに次のことが成り立つ．

補題17　二つの因子が ~ の意味で同値であることと，対応する複素直線束が同型であることとは同値である．

二つの直線束が同型とはなにを意味するかを説明しないと，この補題には意味がない．しかし，ここではそれは省略する．

補題17は，因子のモジュライ空間と複素直線束のモジュライ空間は同じである，と言い換えられる．さらに定理15によって，複素多様体上の複素直線束のモジュライ空間を具体的に決定できるのである．

3.b　正則ベクトル束

いままで述べてきた複素直線束や因子の話は，20世紀に大きく発展した複素多様体論の中心であった．それは，アーベル的なゲージ場の理論と呼べる．これと，2.aで述べたリーマン面のモジュライの理論の高次元化である複素多様体のモジュライの理論（変形理論）はお互いに深くかかわりながら大きく発展した．

20世紀の終わりになって，これらの非可換化がさらなる発展の中心に現れてきた．「非可換化」とはなにかを述べよう．

3.aで少しだけ述べた第1の立場，すなわち $D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$，$p_i\in M$，にたって，因子の概念を複素曲面の場合に一般化することを試みよう．

このとき，$D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$ を，各点のまわりでどのように記述できるであろうか．

3.aの後半，すなわち「方程式を使って各点のまわりで D を表す」のまねをしてみよう．このとき，p_i を表すには，方程式が二つ必要である．（4次元空間上で複素数値の方程式が二つあれば，解は，$4-2\times2=0$ 次元である．）そこで，

$$\begin{cases} f_{1,p}(x) = 0 \\ f_{2,p}(x) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

が p_i を表す方程式だとする．ここでは簡単のため $n_i>0$ としよう．$n_i>1$ のときは，p_i は（3.2）の n_i 重根であるとする．また，p の近くにある p_i は一つとする．その場合は，p の近くでは，（3.2）が $D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$ を表し

ているとしてよい．

さて，次に，$g_{pq}=f_p/f_q$ に当たるものは何であろうか．すなわち，(3.2) が方程式

$$\begin{cases} f_{1,q}(x) = 0 \\ f_{2,q}(x) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

と同値であるとき，$f_{1,p}$, $f_{2,p}$, $f_{1,q}$, $f_{2,q}$ はどういう関係にあるだろうか．(以下に述べることは厳密に考えると問題がある．説明の便宜と思ってほしい．)

たとえば，各々の x に対して，可逆 2×2 行列

$$g_{pq}(x) = \begin{pmatrix} g_{pq;11}(x) & g_{pq;21}(x) \\ g_{pq;12}(x) & g_{pq;22}(x) \end{pmatrix}$$

が存在して

$$\begin{pmatrix} f_{1,p} \\ f_{2,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{pq;11}(x) & g_{pq;21}(x) \\ g_{pq;12}(x) & g_{pq;22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,q} \\ f_{2,q} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

となったらどうであろうか．その場合は，(3.2) と (3.3) は同値である．

また，もし (3.4) が任意の pq に対して成り立つならば，

$$\begin{pmatrix} f_{1,p}(x) \\ f_{2,p}(x) \end{pmatrix} = g_{pq}(x)\begin{pmatrix} f_{1,q}(x) \\ f_{2,q}(x) \end{pmatrix} = g_{pq}(x)g_{qr}(x)\begin{pmatrix} f_{1,r}(x) \\ f_{2,r}(x) \end{pmatrix}$$

かつ

$$\begin{pmatrix} f_{1,p}(x) \\ f_{2,p}(x) \end{pmatrix} = g_{pr}(x)\begin{pmatrix} f_{1,r}(x) \\ f_{2,r}(x) \end{pmatrix}$$

であるから，

$$g_{pq}(x)g_{qr}(x) = g_{pr}(x) \tag{3.5}$$

が成り立つ．式 (3.5) は，数が行列に変わっただけで (3.1) と全く同じである．(3.5) をみたす，可逆 2×2 行列値の関数 g_{pq} たちが与えられたとき，2 次元の **ベクトル束** (vector bundle) が与えられたという．

以上説明してきたことは，複素曲面上での

類似18　$D=n_1C_1+\cdots+n_kC_k$, C_i は2次元 $\Longleftrightarrow$ **複素直線束**

$D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$, p_i は点 $\Longleftrightarrow$ **2次元のベクトル束**

なる対応についてであった．しかし実は，「$D=n_1C_1+\cdots+n_kC_k$, C_i は2次元 ⇔ 複素直線束」というのが数学的に厳密な事実であるのに対して，「$D=n_1p_1+\cdots+n_kp_k$, p_i は点 ⇔ 2次元のベクトル束」の方は，洞察の参考になる原理，ていどの正確さしかない．問題点は（3.2）と（3.3）が同値であることからは，（3.4）が導かれないことである．しかし，点と2次元のベクトル束をある意味で似たものと思う，という発想はゲージ理論の数学のいろいろな場面で大切である．（これは，量子力学の根本原理，粒子と波の二重性，とも関係があるのであろう．）

注意　$2n$ 次元複素多様体 M の中の，$2m$（$m<n-1$）次元の部分多様体は，連接層を与える．連接層とは，ここでの文脈では，特異点があるかもしれないベクトル束と思えばよいだろう．

さて，類似18の2番目は必ずしも厳密ではなかったが，2次元（あるいはもっと次元が高い）ベクトル束という概念自身は，上に述べた定義で厳密に数学的に定義される．

さらに，ベクトル束が**正則ベクトル束**であるとは，g_{pq} の成分が正則関数であることを指す．さらに，正則ベクトル束の同型という概念を考えることで，正則ベクトル束のモジュライ空間を定義することができる．

さて，正則ベクトル場のモジュライ空間を考えることがなぜ，直線束のモジュライの非可換化になるのだろうか．それは，（3.1）と（3.5）の違いが何であったか考えればよい．すなわち，この二つは式の形は同じであるが，一方は行列の他方は数の間の等式であった．したがって，（3.1）に現れる量は可換であるが，（3.5）に現れる量は非可換である．

3.c　非可換ゲージ場とヤン-ミルズ方程式

これまで2,3節で述べてきた話は，すべて複素幾何学または代数幾何学に属する内容である．微分幾何学的な方法特にヤン-ミルズ方程式を考えると，どんなことがわかるのであろうか．まず，次のことに注意しよう．

観察19　複素多様体の複素構造を連続的に変形したとき，その上の正則ベクトル束のモジュライ空間は連続的に変化する．

正確に定理として述べるにはもっと準備がいるので，だいたいの事がらだけを観察として述べた．これをもう少し説明するために，第2節で考えた場合を思いだそう．そこでは，トーラス $T(\tau_1, \tau_2)$ 上の直線束のモジュライは $T(\tau_1, \tau_2)$ 自身であると述べた．注) したがって，パラメータ τ_1, τ_2 を動かして $T(\tau_1, \tau_2)$ を連続変形すると，その上の直線束のモジュライ空間も連続的に変わる．

さて，観察19をどのように応用することができるのだろうか．

たとえば，二つの複素多様体があって，それらが連続的に変形できないことを証明したいとしよう．そのとき，もしそれらの上の正則ベクトル束のモジュライ空間がわかっていれば，それは，モジュライ空間どうしが連続的に変形できるか，という問題に帰着する．

いちばんやさしい例として，直線束のモジュライ空間の場合を考えてみよう．定理15によれば直線束のモジュライ空間は第1ベッチ数の2倍の次元のトーラスである．連続的に変形しても変わらない量のいちばん簡単な例は，次元であろう．したがって，以上の観察から，二つの複素多様体が連続的に変形できれば，その第1ベッチ数は等しいことがわかる．もっともこれは，そんなことをしなくても，容易に示される事実である．

注）厳密にいうとこれは問題がある言い方である．正確には，直線束のモジュライは双対トーラスである．

実のところ，観察19だけだと，上に述べたようにして面白い応用ができる例はたぶんない．このような考え方が有用になるのは，次の定理による．

「定理20」 M_1, M_2 を同じ空間に異なった複素構造を入れてできる複素多様体とする．このとき，M_1 の上の正則ベクトル束のモジュライ空間は M_2 の上の正則ベクトル束のモジュライ空間に連続的に変形できる．

この定理は見やすくするためにひどく不正確な書き方をしている．そのため，「　」をつけた．「同じ空間」というのは不正確な言い方で本当は可微分同相な空間という．

定理20を証明するには，ヤン-ミルズ方程式が必要となる．定理20は次のようにして証明される（ドナルドソンによる）．まず，2次元のベクトル束を考える．すると，その上に，ヤン-ミルズ方程式という偏微分方程式が定まる．ヤン-ミルズ方程式を考えるには空間に複素構造が存在する必要はない．（したがって，これは微分幾何学の範疇に入る考察で，複素幾何学ではない．）しかし，もし空間に複素構造が入っていると，ヤン-ミルズ方程式の解のモジュライ空間は，正則ベクトル束のモジュライ空間と一致することが示されるのである．前者は複素構造によらないから後者もよらない．

定理20を用いて，いろいろな複素曲面の組に対して，それらが可微分同相でないことが証明された．これが，80年代を通じて4次元の位相幾何学に大きな進歩を与えたのである．

以上述べたのは，ゲージ場の幾何学のほんの入口までの，どちらかというと裏道を通った，駆け足の解説にすぎない．最後に参考文献を挙げておく．

参考文献

ゲージ理論（数学関係）

[1]　茂木 勇・伊藤光弘，微分幾何学とゲージ理論，共立出版，1986.

[2]　小林昭七，接続の幾何学とゲージ理論，裳華房，1989.

[3]　深谷賢治，ゲージ理論とトポロジー，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995.

[4]　S. Donaldson, P. Kronheimer, *The Geometry of Four manifolds*, Oxford Univ. Press, 1990.

[5]　D. Freed, K. Uhlenbeck, *Instantons and Four manifolds*, Springer-Verlag, 1991.

[6]　J. Morgan, *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four manifolds*, Mathematical notes, Princeton University Press, 1996.

[7]　深谷賢治，ゲージ理論と4次元の幾何学の新展開，数学セミナー，1995年7，8，9月号.

2，3節に関して

[8]　岩沢健吉，代数関数論，岩波書店，1973.

[9]　H. Wyle（田村二郎訳），リーマン面，岩波書店，1974.

[10]　堀川潁二，複素代数幾何学入門，岩波書店，1990.

[11]　上野健爾，代数幾何学入門，岩波書店，1994.

[12]　Griffis-Harris, *Principle of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, 1978.

[13]　S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, 日本数学会, 1987.

第4話

アインシュタイン計量とモジュライ空間

満渕俊樹

アインシュタイン (Einstein) 計量の研究は，複素微分幾何学，トポロジー，数理物理学，代数幾何学などのいくつもの分野とかかわりながら近年著しい発展を遂げた．ここでは，その発展のきっかけとなった Aubin, Yau によるカラビ (Calabi) 予想の解決について述べるとともに，運動量写像の解説を通して1980年代後半の Kronheimer [14], [15] による ALE gravitational instanton に関する目覚ましい結果を述べる．さらに，モジュライ空間の Gromov コンパクト化で明らかになった「リッチ (Ricci) 曲率正のコンパクト複素曲面の退化に伴い曲率の集中現象が起こり ALE gravitational instanton が発生する」という Anderson [1] および板東-加須栄-中島 [5] の結果の解説を quartic del Pezzo 曲面の場合の例に即して行なう．最後に，リッチ曲率正の場合のカラビ予想の未解決部分に関する二木障害と松島障害の関係をトーリック多様体の場合に運動量写像の話題をおりまぜながら説明する．

1° カラビ予想と del Pezzo 曲面

(X,ω) を n 次元コンパクト連結ケーラー (Kähler) 多様体とする．もちろん ω はケーラー形式なので，X 上の実 (1,1)-form で C^∞ かつ $d\omega=0$ をみたす．また，リッチ形式 $\mathrm{Ric}(\omega)=\sqrt{-1}\,\bar\partial\partial\log\omega^n$ は de Rham のコホモロジー類 $2\pi c_1(X)_{\mathbf{R}}$ を代表する．さて，$\mathrm{Ric}(\omega)$ が ω の定数倍，すなわち

$$\mathrm{Ric}(\omega)=\lambda\omega$$

をみたす実定数 λ が存在するとき，ω が **アインシュタイン-ケーラー計量** であるという．ここで ω を正定数倍して正規化することによって，λ の可能性は次の3種類の値に限られるとしてよい．

$$\lambda = -1 \text{ または } 0 \text{ または } 1.$$

そこで ω をアインシュタイン-ケーラー計量として，上の3種類の λ の値が X のどういう定性的性質を導くかを調べてみよう．

ケース1：　$\lambda = -1 \implies \mathrm{Ric}(\omega) = -\omega \implies c_1(X)_{\boldsymbol{R}} < 0.$

ケース2：　$\lambda = 0 \implies \mathrm{Ric}(\omega) = 0 \implies c_1(X)_{\boldsymbol{R}} = 0.$

ケース3：　$\lambda = 1 \implies \mathrm{Ric}(\omega) = \omega \implies c_1(X)_{\boldsymbol{R}} > 0.$

この逆問題が **カラビ予想** といわれている．すなわち，

予想（1）$c_1(X)_{\boldsymbol{R}} < 0 \implies \mathrm{Ric}(\omega) = -\omega$ をみたすアインシュタイン-ケーラー計量 ω が一意的に存在する．

（2）$c_1(X)_{\boldsymbol{R}} = 0 \implies$ 各ケーラー類にリッチ平坦なアインシュタイン-ケーラー計量がただ一つ存在する．

（3）$c_1(X)_{\boldsymbol{R}} > 0,\ h^0(X, \mathcal{O}(TX)) = 0$ 注)

$\implies \mathrm{Ric}(\omega) = \omega$ をみたすアインシュタイン-ケーラー計量 ω が一意的に存在する．

この予想については1970年代に（1）は Aubin [3] が，（2）は Yau [23] が Monge-Ampère 方程式の深い研究を通して肯定的に解決した．また，(3) はいまだ未解決である（つい最近 Tian は反例を構成したと主張している）が，（1），（2）の解決に伴って近年複素微分幾何学が著しい発展を遂げたことは記憶に新しい．たとえば $\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ の複素構造の唯一性に関する Severi の予想が肯定的に解決された．一方，（3）について $h^0(X, \mathcal{O}(TX)) \neq 0$ の場合でも

注）$h^0(X, \mathcal{O}(TX))$ は第2節で述べる $H^0(X, \mathcal{O}(TX))$ の次元である．

$\mathrm{Ric}(\omega)=\omega$ の解 ω は，X の正則変換群の単位元連結成分の作用を法として一意的であることが知られている（[6] 参照）．いま，次の特別な場合を考えてみよう．

定義　コンパクト連結複素曲面 X が **quartic del Pezzo 曲面**であるとは $c_1(X)_{\mathbf{R}}>0$ かつ $c_1(X)^2[X]=4$ が成り立つときにいう．

実は quartic del Pezzo 曲面がアインシュタイン-ケーラー計量をもつことは Tian と Yau によって示されている（[22] 参照；[16] も見よ）．その意味で上の (3) は X が quartic del Pezzo 曲面であるときは正しい．さて，$\mathcal{M}_{\mathrm{alg}}$ を quartic del Pezzo 曲面の同型類全体の空間，すなわち

$$\mathcal{M}_{\mathrm{alg}} := \{\,\text{quartic del Pezzo 曲面 } X \text{ 全体}\,\}\,/\,\text{isomorphisms}$$

とする．一方，quartic del Pezzo 曲面は $h^0(X,\mathcal{O}(TX))=0$ をみたすので，各 quartic del Pezzo 曲面はただ一つのアインシュタイン-ケーラー計量をもつ．そこで微分幾何学的なモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{diff}}$ を考えよう．

$$\mathcal{M}_{\mathrm{diff}} := \{\,(X,\omega)\,;\,\mathrm{Ric}(\omega)=\omega\,\}\,/\,\text{holomorphic isometries}$$

ただし，X は quartic del Pezzo 曲面全体を動くとする．このとき，自然な写像 $\mathcal{M}_{\mathrm{diff}}\ni(X,\omega)\mapsto X\in\mathcal{M}_{\mathrm{alg}}$ は次の同一視を与える．

$$\mathcal{M}_{\mathrm{diff}}\cong\mathcal{M}_{\mathrm{alg}}$$

この写像の全射性は quartic del Pezzo 曲面に対するアインシュタイン-ケーラー計量の存在定理から，またその単射性はアインシュタイン-ケーラー計量の一意性から導かれる．以下の各節では $\mathcal{M}_{\mathrm{diff}}$ と $\mathcal{M}_{\mathrm{alg}}$ を同一視して，単に $\mathcal{M}$ と書き，**quartic del Pezzo 曲面のモジュライ空間**とよぶ．この $\mathcal{M}$ については第5節以下で詳しく扱う．

2° 運動量写像

コンパクトリー群 G が n 次元コンパクト連結ケーラー多様体 (X,ω) に等長的かつ effective に作用していると仮定し，また G を複素化して得られる連結簡約代数群 G_C がケーラー多様体 X に正則に作用するとする．X 上の正則ベクトル場全体のなす空間を $\mathfrak{h}:=H^0(X,\mathcal{O}(TX))$ で表わすと，$\mathfrak{h}$ の各元 u について，対応する実ベクトル場 $u^R:=u+\bar{u}$ を X 上で考えることによって，複素リー代数の同型

$$(\mathfrak{h},\sqrt{-1}\,)\cong(\mathfrak{h}_{\mathrm{real}},J),\qquad u\longleftrightarrow u^R$$

を得る．ただし，$\mathfrak{h}_{\mathrm{real}}:=\{u^R;u\in\mathfrak{h}\}$．また，$J$ を X の複素構造とする．一方，簡約群 G_C の X への作用により，$\mathfrak{g}_C=\mathfrak{g}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}$ は自然に $\mathfrak{h}$ の部分空間となる．各 $u\in\mathfrak{g}$ に対し，u^R による ω のリー微分 $L_{u^R}\omega$ は，G の作用の等長性から

$$\begin{aligned}0=L_{u^R}\omega&=(d\circ i_{u^R}+i_{u^R}\circ d)\omega\\&=d(i_{u^R}\omega)\end{aligned}$$

すなわち，$i_{u^R}\omega$ は d-closed，実はもっと強く d-exact であることがわかる．それゆえ，$\mathfrak{g}^*$ を実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の双対空間とすると，X から $\mathfrak{g}^*$ への C^∞ 写像 $\mu:X\to\mathfrak{g}^*$ が存在して，各 $u\in\mathfrak{g}$ に対し次式をみたす．

$$i_{u^R}\omega=d\langle\mu,u\rangle \tag{$*$}$$

さらに，この式と ω の G-不変性から μ を G-同変な写像にとれる．ただし，G の $\mathfrak{g}^*$ への作用として coadjoint なものを考える．この $\mu:X\to\mathfrak{g}^*$ は古典力学の運動量や角運動量の一般化であり（詳しくは [2] の Appendix 5 を参照），ケーラー多様体 (X,ω) の G-作用に関する**運動量写像**とよばれる．実は，定義そのものは X のコンパクト性とはまったく関係ない（運動量写像の一般的な参考書としては，[12] が勧められる）．こうした μ は，定数ベクトルによる $\mathfrak{g}^*$ の translation を除いて，G-作用から一意的に定まることが次のようにわかる．すなわち，与えられた G-作用に対して二つの運動量写像 $\mu':X\to\mathfrak{g}^*$ と

$\mu'' : X \to \mathfrak{g}^*$ があったとするとき，各 $u \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} d\langle \mu' - \mu'', u\rangle &= d\langle \mu', u\rangle - d\langle \mu'', u\rangle \\ &= i_{u^R}\omega - i_{u^R}\omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって，$\mu' - \mu''$ はベクトル空間 $\mathfrak{g}^*$ において定数ベクトルを定め，求める一意性が示された．

さて，コンパクトな X とは少し違うが，運動量写像の雰囲気をつかむため，標準的なケーラー形式

$$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

が与えられた $X = \boldsymbol{C}^n = \{ z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) ; z_i \in \boldsymbol{C} \}$ をとり，群 $G = S^1 = \{ e^{\sqrt{-1}\theta} ; \theta \in \boldsymbol{R} \}$ の X への等長的かつ diagonal な作用を考える．すなわち，

$$e^{\sqrt{-1}\theta}\cdot(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (e^{\sqrt{-1}\theta}z_1, e^{\sqrt{-1}\theta}z_2, \cdots, e^{\sqrt{-1}\theta}z_n).$$

このとき，$\boldsymbol{R} = \{x \in \boldsymbol{R}\}$ と $\mathfrak{g}^*$ を $x \leftrightarrow x d\theta$ で同一視すると，運動量写像 $\mu : X (= \boldsymbol{C}^n) \to \mathfrak{g}^* (= \boldsymbol{R})$ は次の式で与えられる．

$$\mu(z) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \tag{$**$}$$

この事実を検証してみよう．G は $\mathfrak{g}^*$ に trivial に作用しかつ，（＊＊）の μ は G-不変な写像なので，その G-同変性は明らか．よって，（＊）を調べればよい．そこで $\mathfrak{g}$ の基底 $u = \partial/\partial\theta$ をとると，

$$\begin{aligned} u^R &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right) \end{aligned}$$

（ただし，$z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$）

と書けるので，

$$
\begin{aligned}
i_{u^\#}\omega &= -\frac{1}{2}(z_i d\bar{z}_i + \bar{z}_i dz_i) \\
&= -\frac{1}{2} d\left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right) \\
&= d\mu
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$\mathfrak{g}^* = \boldsymbol{R}$ によって，μ と $\langle \mu, u \rangle$ $(= \langle \mu, \partial/\partial\theta \rangle)$ は同一視されるので，（＊）が確かめられた．

3° hyper ケーラー構造

Kronheimer の定理を説明するために，hyper ケーラー構造について述べておこう．$4n$ 次元リーマン多様体 (X, g) が **hyper ケーラー構造** をもつとは，X 上に次の条件をみたす三つの複素構造 I, J, K が存在するときにいう（[8] 参照）．

$$
\begin{cases}
\text{計量 } g \text{ は } I, J, K \text{ の各々に対しケーラー計量を定める．} \\
IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.
\end{cases}
$$

よって，X の各点 p で $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}I + \boldsymbol{R}J + \boldsymbol{R}K$ が接空間 T_pX に作用する．また，(X, g) が hyper ケーラー多様体であることと，(X, g) のホロノミー群が $Sp(n)$ に reduce することとは同値である．さて，hyper ケーラー多様体 (N, g) 上で，複素構造 I, J, K に対するケーラー形式 $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ をそれぞれ次式で定める．

$$
\begin{cases}
\omega_I(u, v) := g(Iu, v) \\
\omega_J(u, v) := g(Ju, v) \\
\omega_K(u, v) := g(Ku, v)
\end{cases}
$$

上に述べたホロノミー群の reduction から，一般に hyper ケーラー多様体

(X, g) はリッチ平坦である．たとえば，複素構造 I, J, K に対して，non-vanishing な即ち零点をもたない正則2-form $\sigma_I, \sigma_J, \sigma_K$ がそれぞれ

$$\begin{cases} \sigma_I := \omega_J + \sqrt{-1}\,\omega_K \\ \sigma_J := \omega_K + \sqrt{-1}\,\omega_I \\ \sigma_K := \omega_I + \sqrt{-1}\,\omega_J \end{cases}$$

で定義され，計量 g に関して parallel である．逆に，$c_1(X)_{\boldsymbol{R}} = 0$ をみたす連結複素多様体 X がコンパクトなときは，X にケーラー類を一つ与えると，その類の中のリッチ平坦なケーラー計量を ω_I，かつ nonvanishing な正則2-form を σ_I とならしめるような hyper ケーラー構造を X に与えることができる．

上のような hyper ケーラー多様体 (X, g) に，コンパクトリー群 G が，計量 g および複素構造 I, J, K を保って作用しているとする．G はケーラー形式 $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ も保つので，ケーラー多様体 (X, ω_I)，(X, ω_J)，(X, ω_K) の運動量写像をそれぞれ $\mu_I : X \to \mathfrak{g}^*$，$\mu_J : X \to \mathfrak{g}^*$，$\mu_K : X \to \mathfrak{g}^*$ とする．そして，**hyper ケーラー運動量写像** $\mu : X \to \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ $(= \mathfrak{g}^* \otimes \boldsymbol{R}^3)$ を次で定義する．

$$\mu := (\mu_I, \mu_J, \mu_K).$$

簡単のため，$\eta \in \mathfrak{g}^* \otimes \boldsymbol{R}^3$ を運動量写像 μ の regular value とし，さらに η は G の coadjoint action で固定されるとする．また，G は $\mu^{-1}(\eta)$ に free に作用するとする．このとき，

$$X_\eta := \mu^{-1}(\eta)/G$$

とおくと，次のように X_η は hyper ケーラー構造をもつ（[13] 参照；[7]，[14] も見よ）．

(a)　各 $p \in \mu^{-1}(\eta)$ に対し，$(d\mu)_p : T_p X \to T_\eta \mathfrak{g}^*$ は全射．

(b)　$\dim_{\boldsymbol{R}} X_\eta = \dim_{\boldsymbol{R}} X - 4 \dim_{\boldsymbol{R}} G$.

(c)　N 上の g, I, J, K は X_η 上の $g_\eta, I_\eta, J_\eta, K_\eta$ を誘導する．

上のような X_η の構成と $SU(2)$ の有限部分群に関する McKay 対応とを組み合わせることによって，Kronheimer は第4節の定理の前半部，すなわち“ALE gravitational instanton の構成”を得た．

（a）の証明　$W := \{ v^R{}_{|p} \in T_pX \,;\, v \in \mathfrak{g} \}$ とおく．ここでは，（a）を証明するとともに，$\mathrm{Ker}\,(d\mu)_p$ が T_pX の中で $(IW \oplus JW \oplus KW)^\perp$ に等しくなることを示そう．まず，W, IW, JW, KW は互いに直交することに注意せよ．たとえば $W \perp IW$ は，$u, v \in \mathfrak{g}$ としたとき，

$$
\begin{aligned}
g(Iu^R, v^R)_{|p} &= \omega_I(u^R, v^R)_{|p} \\
&= (i_{u^R}\omega_I)(v^R) \\
&= \langle (d\mu_I)_p(v^R), u \rangle_{|p} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

から従う．ただし，最後の等式は，$\{ \exp(tv^R) \,;\, t \in \boldsymbol{R} \}$ の作用が点 $\eta = \mu_I(p)$ を固定し $(d\mu_I)_p(v^R) = 0$ が成り立つことによる．次に，$\zeta \in \mathrm{Ker}\,(d\mu)_p$ としたとき，任意の $u \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
g(Iu^R, \zeta)_{|p} &= \omega_I(u^R, \zeta) \\
&= \langle (d\mu_I)_p(\zeta), u \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

ゆえに $\mathrm{Ker}\,(d\mu)_p \perp IW$．同様の議論が JW, KW に対しても成り立ち，$\mathrm{Ker}\,(d\mu)_p \perp IW \oplus JW \oplus KW$ を得る．よって，

$$
\begin{aligned}
\dim_R((d\mu)_p(T_pX)) &= \dim_R X - \dim_R \mathrm{Ker}\,(d\mu)_p \\
&\geq \dim_R(IW \oplus JW \oplus KW) \\
&= 3 \dim_R W \\
&= 3 \dim_R \mathfrak{g}.
\end{aligned}
$$

すなわち，$(d\mu)_p$ は全射でかつ，上の不等号は等号に他ならない．よって，$\mathrm{Ker}(d\mu)_p = (IW \oplus JW \oplus KW)^{\perp}$ も明らか．

（b）の証明　上の（a）の証明より，$W \subset (IW \oplus JW \oplus KW)^{\perp} = \mathrm{Ker}(d\mu)_p$ が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}\dim_R X_\eta &= \dim_R(\mathrm{Ker}(d\mu)_p) - \dim_R G \\ &= (\dim_R X - 3\dim_R W) - \dim_R G \\ &= \dim_R X - 4\dim_R G.\end{aligned}$$

（c）の証明　$\pi : \mu^{-1}(\eta) \to X_\eta$ $(= \mu^{-1}(\eta)/G)$ を自然な projection とすると，$T_{\pi(p)}X_\eta$ は

$$\begin{aligned}&T_p\mu^{-1}(\eta)\ (= \mathrm{Ker}(d\mu)_p) \text{ における } W \text{ の直交補空間} \\ &\cong (T_pX \text{ における } W \oplus IW \oplus JW \oplus KW \text{ の直交補空間})\end{aligned}$$

と同一視される．$W \oplus IW \oplus JW \oplus KW$ は，I, J, K の作用で閉じているので，X 上のリーマン計量 g，複素構造 I, J, K は自然に X_η 上のリーマン計量 g_η，複素構造 I_η, J_η, K_η を誘導する．

4° ALE gravitational instanton に関する Kronheimer の定理

この節では中島啓氏の記事［20］を引用させていただく．ALE とは asymptotically locally Euclidean すなわち漸近局所ユークリディアンを意味する．Yang-Mills instanton の類推からもともとは物理学者によって ALE gravitational instanton の概念が導入された（［11］参照）．

定義　4次元リーマン多様体 (X, g) が ALE であるとは，あるコンパクト集合 K を除いた集合 $X \setminus K$ と，ユークリッド空間の遠方を有限群で割った空

間 $(\boldsymbol{R}^n \setminus B_R)/\Gamma$ との微分同型 φ が存在し次の意味で近似を与える．すなわち各 $x \in X \setminus K$ に対し，

$$(\varphi_* g)_{ij}(x) = \delta_{ij} + a_{ij}(x),$$
$$|\partial^p a_{ij}(x)| = O(|x|^{-4-p}), \qquad p \geq 0.$$

ただし，$B_R := \{x \in \boldsymbol{R}^n\,;\, |x| \leq R\}$ でかつ，Γ は $O(4)$ の有限部分群で S^3 に free に作用する．

ここで $\Gamma \subset SU(2)$ と仮定すると，Γ は完全に分類され，次のいずれかと共役になる．

A_n 型：　$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta^k & 0 \\ 0 & \zeta^{-k} \end{pmatrix} ; k = 0, 1, \cdots, n \right\} \cong \boldsymbol{Z}_{n+1}.$

D_n 型：　$\Gamma = \boldsymbol{D}^*_{4(n-2)}$　　位数 $4(n-2)$ の2項2面体群.

E_6 型：　$\Gamma = \boldsymbol{T}^*$　　位数 24 の2項4面体群.

E_7 型：　$\Gamma = \boldsymbol{O}^*$　　位数 48 の2項8面体群.

E_8 型：　$\Gamma = \boldsymbol{I}^*$　　位数 120 の2項20面体群.

ただし，ζ は 1 の原始 $(n+1)$ 乗根とする．このとき，商空間 $\boldsymbol{C}^2/\Gamma$ は原点にのみ特異点をもつアファイン代数多様体となる．この minimal resolution を $\pi: S \to \boldsymbol{C}^2/\Gamma$ としたとき，その例外集合 $\pi^{-1}(0)$ はいくつかの $\boldsymbol{P}^1$ の和集合として表わせるが，その configuration を双対グラフで表わすと，上記の適当なルート系に対応するディンキン図式があらわれる．すなわち，例外集合 $\pi^{-1}(0)$ の既約成分を順に $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_r$ と書くことにすると，そのホモロジー類

$$[\Sigma_i] \in H_2(S\,;\boldsymbol{Z}), \qquad i = 1, 2, \cdots, r$$

は $H_2(S\,;\boldsymbol{Z})$ の基底をなし，交叉行列は上の対応によるルート系のカルタン行列と一致する．S の微分構造だけを考えたものを X とすると，Kronheimer の定理は次のとおりである．

定義 $\alpha, \beta, \gamma \in H^2(X; \boldsymbol{Z})$ が非退化条件をみたすとは，$[\Sigma] \circ [\Sigma] = -2$ をみたす任意の $[\Sigma] \in H_2(X; \boldsymbol{Z})$ に対し $(\alpha([\Sigma]), \beta([\Sigma]), \gamma([\Sigma])) \neq (0, 0, 0)$ が成り立つときにいう．

定理 (Kronheimer [14], [15]) 非退化条件をみたす $\alpha_I, \beta_J, \gamma_K \in H^2(X; \boldsymbol{Z})$ に対して，X 上のリーマン計量 g と hyper ケーラー構造 I, J, K で次をみたすものがある．

(1) (X, g) は ALE.

(2) ケーラー形式 $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ のコホモロジー類が $[\omega_I] = \alpha_I$，$[\omega_J] = \alpha_J$，$[\omega_K] = \alpha_K$ をみたす．

逆に，すべての ALE hyper ケーラー実4次元多様体は，上の構成で与えられる．そして一意性に関しては，ALE hyper ケーラー実4次元多様体 (X', g', I', J', K')，$(X'', g'', I'', J'', K'')$ に対し，$\psi^*(\alpha_{I''}, \alpha_{J''}, \alpha_{K''}) = (\alpha_{I'}, \alpha_{J'}, \alpha_{K'})$ をみたす微分同型 $\psi : X' \cong X''$ が存在すれば，(X', g', I', J', K') と $(X'', g'', I'', J'', K'')$ は hyper ケーラー構造を保つ等長写像で同型になる．

たとえば，上の定理で J, K を忘れることによって得られる複素多様体 (X, g, I) のうち，minimal resolution S と双正則になるものは $\alpha_I = \alpha_J = 0$ で特徴づけられる．リッチ平坦な ALE 実4次元多様体を一般に ALE gravitational instanton とよぶが，上の定理の中心的な話題である ALE hyper ケーラー実4次元多様体は，もちろん ALE gravitational instanton の例となっている．これはK3曲面の open version ともみなされ，上の定理の一意性の部分は Torelli 型の定理といえる．

5° リッチ曲率正のコンパクト複素曲面の退化

定理（Anderson [1]，板東-加須栄-中島 [5]）4次元コンパクトアインシュタイン多様体の列 $\{(X_i, g_i)\}$ が次の条件をみたすものとする．

$$\mathrm{diameter}\,(X_i, g_i) \le K_1$$

$$\mathrm{volume}\,(X_i, g_i) \le K_2$$

$$\int_{X_i} |R_i|^2 d\,\mathrm{vol}_{g_i} \le K_3$$

ただし，K_1, K_2, K_3 は i によらない正の定数．また，R_i は計量 g_i の曲率テンソル．このとき，ある部分列 $\{(X_j, g_j)\}$ が存在して

$$(X_j, g_j) \to (X_\infty, g_\infty)$$

とハウスドルフ（Hausdorff）距離の意味でアインシュタイン orbifold (X_∞, g_∞) に収束する．X_∞ の特異点は有限個で，各特異点 p に対してその点に収束するような点 $p_j \in X_j$ が存在して，$\lim_{j\to\infty} r_j = +\infty$ となるような適当な rescaling constant $r_j > 0$ に対し，

$$(X_j, r_j g_j, p_j) \to (M_\infty, h_\infty, p_\infty)$$

なる pointed なハウスドルフ距離の意味での収束を得る．ここに，極限 (M_∞, h_∞) は ALE gravitational instanton である．

この定理をリッチ曲率正のコンパクト複素曲面，特に quartic del Pezzo 曲面の退化の場合に適用してみよう．そこで，quartic del Pezzo 曲面の列 Y_i, $i = 1, 2, \cdots$, を考える．第1節で述べたように，各 Y_i 上には $\mathrm{Ric}\,(\omega_i) = \omega_i$ をみたすアインシュタイン-ケーラー計量 ω_i が一意的に存在する．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{volume}\,(Y_i, \omega_i) &= \int_{Y_i} \frac{{\omega_i}^2}{2!} \\ &= 2\pi^2 c_1(Y_i)^2 [Y_i] \\ &= 8\pi^2, \end{aligned}$$

$$\int_{Y_i} |R_i|^2 d\,\mathrm{vol}_{\omega_i} = 8\pi^2 \int_{Y_i} c_2(Y_i)$$
$$= 8\pi^2 \chi(Y_i)$$
$$= 64\pi^2$$

が成り立ち，しかも $\mathrm{Ric}(\omega_i) = \omega_i$ により Meyer の定理から

$$\mathrm{diameter}(Y_i, \omega_i) \leq \pi$$

が成り立つ．ゆえに上の定理が適用できて，部分列 $\{(Y_j, \omega_j)\}$ が存在してハウスドルフ距離の意味で，あるアインシュタイン-ケーラー orbifold $(Y_\infty, \omega_\infty)$ に収束する．しかも Y_∞ の特異点は有限個で，その特異性の様子は定理の最後にでてくる ALE gravitational instanton として記述される．

さて，quartic del Pezzo 曲面のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ をもう少し具体的に記述してみよう．そして，ハウスドルフ距離で $\mathcal{M}$ をコンパクト化した $\overline{\mathcal{M}}$ も求めてみる（詳しくは [16] を参照せよ）．各 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5) \in \boldsymbol{C}^5$ に対して $\boldsymbol{P}^4(\boldsymbol{C})$ の subvariety V_λ を次のように定める．

$$V_\lambda = \left\{ (x_1 : x_2 : \cdots : x_5)\,;\, \sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i x_i{}^2 = 0 \right\}$$

このとき，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ がすべて相異なるとき，V_λ は quartic del Pezzo 曲面になり，また逆にすべての quartic del Pezzo 曲面はそういう形で得られる．一方，高々 ordinary double point しかもたない quartic del Pezzo orbifold（つねに複素次元 2 を仮定し，以下 quartic ODP del Pezzo と書くことにする）は，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ がすべて相異なる V_λ のほか，次の 2 種類の V_λ で尽きている．

(a)　$\lambda_1 = \lambda_2$ で $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ はすべて相異なる．このとき，V_λ は A_1-特異点を 2 個もつ．

(b)　$\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ で $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_5$ はすべて相異なる．このとき，V_λ は A_1-特異点を 4 個もつ．

このいずれの V_λ もアインシュタイン-ケーラー計量をもつことがわかる．$\mathfrak{S}_5$ を5次の対称群とするとき，$\sigma \in \mathfrak{S}_5$ および $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL(2;\boldsymbol{C})$ に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i x_i{}^2 = 0 \right\} \cong \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{5} \lambda_{\sigma(i)} x_i{}^2 = 0 \right\}$$
$$\cong \left\{ \sum_{i=1}^{5} (c\lambda_i + d) x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{5} (a\lambda_i + b) x_i{}^2 = 0 \right\}$$

が成り立つので，各 λ に対して $\tilde{\lambda} = ((1:\lambda_1), (1:\lambda_2), \cdots, (1:\lambda_5)) \in \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})^5$ を対応させることによって次を得る．

$$\overline{\mathcal{M}} \cong PGL(2;\boldsymbol{C}) \backslash \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})^5 / \mathfrak{S}_5, \qquad V_\lambda \longleftrightarrow \tilde{\lambda}.$$

ただし，$\overline{\mathcal{M}}$ は quartic ODP del Pezzo の同型類全体のなす空間に等しく，一方 $PGL(2;\boldsymbol{C}) \backslash \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})^5$ は，$\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})^5$ の semistable point 全体を $PGL(2;\boldsymbol{C})$ の作用で割った商空間を意味するが，実はこれが quartic del Pezzo 曲面になることが知られている（たとえば [10]，[18] を参照）．もちろん $\mathcal{M}$ は，上の $\overline{\mathcal{M}}$ のザリスキー開集合で

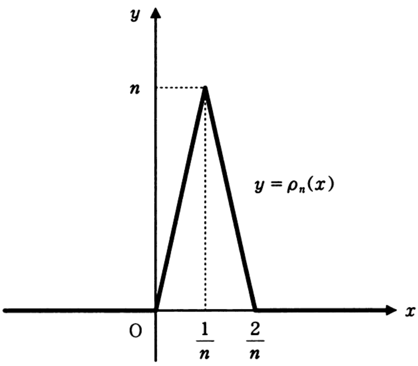
$$\{ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_5) \in \boldsymbol{C}^5 \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_5 \text{ はすべて相異なる} \} \quad (\subset \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})^5)$$

の $PGL(2;\boldsymbol{C}) \backslash \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})^5 / \mathfrak{S}_5$ における自然な像となっている．結局，quartic del Pezzo 曲面の退化によって発生する ALE gravitational instanton は，上の (a), (b) における A_1-特異点に伴ってでてくることがわかる．したがってこれは，第4節の Kronheimer の定理の S として $\boldsymbol{C}^2/\boldsymbol{Z}_2$ の minimal resolution をとった場合の ALE gravitational instanton に他ならない．

6° オイラー数

上で構成した非特異な quartic del Pezzo 曲面 $V_\lambda \in \mathcal{M}$ に対しては，そのオイラー数 $\chi(V_\lambda)$ はちょうど 8 であるが，特異性のある $V_\lambda \in \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$ に対しては 8 より小さくなる．V_λ のオイラー数が 8 から減るに従って，曲率が集中した特異点で ALE gravitational instanton が発生する．この種の事情を象徴的に示すモデルを以下にあげよう．そこで，1 変数関数の列 $\rho_n = \rho_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, を次で定める．

$$\rho_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ n^2 x & 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2 x & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n \leq x \end{cases}$$



この ρ_n を数直線 $\boldsymbol{R}^1$ 上の密度関数と思うと，対応する $(\boldsymbol{R}^1, \rho_n)$ の全質量は次の積分計算によって 1 に等しい．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = 1.$$

一方，$n \to \infty$ とすると，関数 ρ_n の各点収束の意味での極限関数 ρ_∞ は零関数

0である．$(\boldsymbol{R}^1, \rho_n)$ の極限であるべき $(\boldsymbol{R}^1, \rho_\infty)$ の全質量は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\infty(x)\,dx = 0$$

で1より減ってしまうが，その1から0に減ったぶんは，原点にのみ1の質量が集中した粒子（的状態）の発生と理解できる．これは数学的には，測度 $\rho_n dx$ が $n \to \infty$ のとき，原点に1のウエイトをもつディラック測度に収束するというのと同値である．

7°　二木障害と松島障害

X をファノ多様体，すなわち $c_1(X)_{\boldsymbol{R}} > 0$ をみたすコンパクト連結ケーラー多様体とする．よって，ω をコホモロジー類 $2\pi c_1(X)_{\boldsymbol{R}}$ に属するケーラー形式とすると，

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} f_\omega$$

をみたす滑らかな実数値関数 f_ω が存在する．一方，X 上の正則ベクトル場全体のなす空間を $\mathfrak{g}$ で表わすと，各 $\mathcal{Y} \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$F_X(\mathcal{Y}) = \int_X (\mathcal{Y} f_\omega)\,\omega^n$$

で線形写像 $F_X : \mathfrak{g} \to \boldsymbol{C}$ を定めると，これはリー代数としての指標で，かつ計量 ω の選び方によらない．しかも X 上にアインシュタイン-ケーラー計量が存在すると，$\mathrm{Ric}(\omega) = \omega$ をみたすケーラー計量 ω が存在するので F_X は零写像となる．そしてこの F_X を**二木障害**とよぶ（[9] を参照せよ）．実際，二木障害 F_X が消えない X の例があり，こういった X はアインシュタイン-ケーラー計量をもち得ない．そこで，第1節のカラビ予想の (3) から，次のより一般な問題が提起される．

問題（二木）　$F_X = 0$ のとき，X にはアインシュタイン-ケーラー計量が存在するか？

いまのところ，この問いに対する反例は知られていない（もっとも Tian の最近の主張を認めればこの問いは正しくないことになる）．一方，X の正則変換群 $\mathrm{Aut}(X)$ が簡約可能な（すなわち何らかのコンパクト群の複素化に等しい）とき“**松島障害**が消える”ということにすると，X がアインシュタイン-ケーラー計量をもつとき，松島障害は必ず消えることが知られている（たとえば［17］を見よ）．ところで，松島障害は消えるが二木障害は消えないような X はたくさんある．しかし，その逆の例はまったく知られていない．しかも，そういう例が存在しないと予想することと Tian の主張とは矛盾しないことが知られているので，上の問題を次の予想の形に修正すると，非常にもっともらしく思われる．

予想　$F_X=0$ のとき，$\mathrm{Aut}(X)$ は簡約可能である．

さて，n 次元のトーリックな多様体とは n 次元代数トーラス群 $(\boldsymbol{C}^*)^n$ の同変コンパクト化であるような代数多様体のことであるが，X がトーリックなファノ多様体であるときには，上の予想が $n\leq 3$ のときには正しいことが知られていた．最近，4次元のトーリックなファノ多様体の分類が Batyrev によって得られたが，中川［19］はその分類を用いて上の予想が4次元のトーリックなファノ多様体に対しても正しいことを示した．一般に n 次元のトーリックなファノ多様体はその群作用に関する運動量写像によって $\boldsymbol{R}^n$ の凸体（polytope）に写される．二木障害が消えるかどうかは，この凸体の重心が原点になるかどうかで判定でき，一方，松島障害が消えるかどうかもこの凸体のみの性質で判定される．こうして，たとえば $n\leq 4$ のとき，上の予想が正しいかどうかを分類を用いて確かめられるのである（ちなみに mirror symmetry も双対凸体の概念によって説明されることを Batyrev が見いだしたことは記憶に新しい）．このほかにもアインシュタイン-ケーラー計量についてはいろいろと面白い話題があるが，別の機会に述べることにする．

参考文献

[1] M. Anderson, Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 455 – 490.

[2] V. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Text in Math. **60**, Springer-Verlag, New York, 1978.

[3] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982.

[4] S. Bando, Bubbling out of Einstein manifolds, *Tôhoku Math. J.* **42** (1990), 205 – 216.

[5] S. Bando, A. Kasue, and H. Nakajima, On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth, *Invent. Math.* **97** (1989), 313 – 349.

[6] S. Bando and T. Mabuchi, Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions, in "Algebraic Geometry, Sendai, 1985," Kinokuniya and North-Holland, *Adv. Stud. Pure Math.* **10** (1987), 11 – 40.

[7] A. Besse, *Einstein manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3rd Ser. **10**, Springer-Verlag, New York, 1987.

[8] E. Calabi, Métriques kähleriennes et fibrés holomorphes, *Ann. Ecol. Norm. Sup.* **12** (1979), 269 – 294.

[9] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, *Invent. Math.* **73** (1983), 437 – 443.

[10] A. Futaki, The Ricci curvature of symplectic quotients of Fano manifolds, *Tôhoku Math. J.* **39** (1987), 329 – 339.

[11] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Gravitational multi-instantons, *Phys. Lett.* B **78** (1978), 430 – 432.

[12] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic techniques in Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[13] N. Hitchin, A. Karlehede, U. Lindstrom and M. Rocek, Hyperkähler metrics and supersymmetry, preprint, Stockholm, 1986.

[14] P. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyperkähler quotient, *J. Diff. Geom.* **29** (1989), 665 – 683.

[15] P. Kronheimer, A Torelli-type theorem for gravitational instantons, *J. Diff. Geom.* **29** (1989), 685 – 697.

[16] T. Mabuchi and S. Mukai, Stability and Einstein-Kähler metric of a quartic del Pezzo surface, in *"Einstein metrics and Yang-Mills connections,"*

Marcel Dekker, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **145** (1993), 133 − 160.

[17] Y. Matsusima, Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne, *Nagoya Math. J.* **11** (1957), 145 − 150.

[18] D. Mumford and J. Forgarty, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Ergeb. Math. Grenzgeb. **34** (1982).

[19] Y. Nakagawa, Einstein-Kähler toric Fano fourfolds, *Tôhoku Math. J.* **45** (1993), 297 − 310.

[20] 中島 啓, ALE gravitational instanton の幾何—Kleinian singularity, Einstein 計量, Yang-Mills instanton：日本数学会1989年春季年会幾何学分科会講演アブストラクト.

[21] 新田貴士, hyperkähler manifold と hyperkähler quotient, 北海道大学数学講究録 "Superstring 理論とK3曲面" シンポジウム報告集 (1988), 61 − 76.

[22] G. Tian and S. T. Yau, "Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $C_1 > 0$," *Comm. Math. Phys.* **112** (1987), 175 − 203.

[23] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, *Comm. Pure and Appl. Math.* **31** (1978), 339 − 411.

第5話

量子重力と弦理論

川合　光

1° はじめに

今や，自然界の基本的な相互作用のうち，重力以外はほぼ完全に理解されたといってよい．実際，電弱相互作用と強い相互作用が標準模型と呼ばれる場の量子論で記述されていることは，もはや疑う余地のないことである．さらに，クォークやレプトンの多重項の構造や，ゲージ場の結合定数のエネルギー依存性などを調べると，標準模型に現れるゲージ場が GUT エネルギー，すなわち，10^{16} GeV 程度のエネルギーでは一つの統一されたものとして振る舞うことがわかっている．

他方，素粒子の間に働く重力は，通常のエネルギー領域では非常に弱いため，実験にはかからない．しかしながら，エネルギーがプランクエネルギー，すなわち 10^{19} GeV 程度になると，重力も他の相互作用と同程度の強さになることが簡単な考察からわかる．プランクエネルギーが GUT エネルギーと大して変わらないことは，大体そのあたりのエネルギー領域ですべての相互作用が統一されていることを強く示唆している．すなわち，自然界には，10^{16} GeV から 10^{19} GeV 程度の基本的なスケールがあり，その低エネルギーでの有効理論として，標準模型と重力が観測されているにちがいない．

このような考えは，決して乱暴なものではなく，ここ10年の量子重力および弦理論の発展により，しだいに現実的なものとなってきている．いずれにしても，標準模型が完全に確立された現在，素粒子物理学の次の課題は，重力をも含んだ完全な統一理論を見つけだすことであり，そう遠くない将来に

実現されると思われる．

2° 場の量子論

重力場の議論に入る前に，通常の場の量子論がどのように定式化されているかを概観しておこう．

2.1 量子力学と場の量子論

まず，有限自由度の量子力学の経路積分による定式化を思いだそう．一般座標 q で記述される系が作用 $S[q]$ をもっていたとする．時刻 t_1 で座標 q_1 であった系が，時刻 t_2 で座標 q_2 に遷移する確率振幅は

$$\langle q_2, t_2 \mid q_1, t_1 \rangle = \int_{\substack{q(t_1)=q_1 \\ q(t_2)=q_2}} \mathcal{D}q \exp(iS[q]) \tag{2.1}$$

で与えられる．ここで右辺の積分記号は，$t=t_1$ で $q=q_1$ を出発し，$t=t_2$ で $q=q_2$ に到達するようなすべての経路についてのたし合わせを意味する．

これを場の理論に適用すると次のようになる．具体的に考えるため，スカラー場 $\phi(x)$ を考えその作用を $S[\phi]$ とする．たとえば，ϕ^4 理論の場合は

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right) \tag{2.2}$$

である．このとき，次ページの図1のように4次元時空内に二つの空間的超曲面 F_1, F_2 を考えると，F_1 上で場の配位が $\phi_1(x)$ （$x \in F_1$）であったものが F_2 上で場の配位 $\phi_2(x)$ （$x \in F_2$）へと遷移する確率振幅は

$$\langle \phi_2, F_2 \mid \phi_1, F_1 \rangle = \int_{\substack{\phi=\phi_1\ (F_1 \text{上}) \\ \phi=\phi_2\ (F_2 \text{上})}} \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]) \tag{2.3}$$

で与えられる．ここで右辺の積分記号は，F_1 と F_2 にはさまれた領域で，ϕ_1 と ϕ_2 をつなぐようなすべての場の配位についてのたし上げを意味している．

原理的には (2.3) のような量がわかればいいのであるが，通常はもう少し

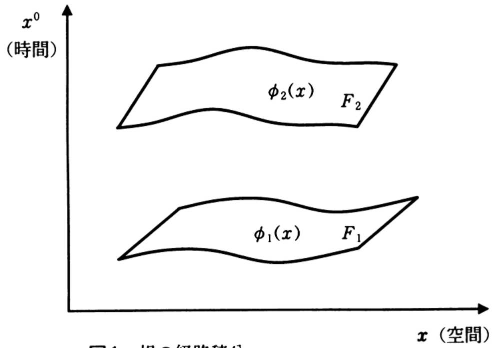


図1　場の経路積分
F_1, F_2 は無限に拡がった空間的超曲面である.

扱いやすい量として，次のようなグリーン関数 $G^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考える.

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp(iS[\phi])}{\int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi])} \tag{2.4}$$

ここで，右辺の経路積分は時空の全領域におけるすべての場の配位についてのたし上げであるが，時間が正および負の無限大のときには基底状態がとり出されるようにするため，ふつうは作用（2.2）の表式で，m^2 に少し虚部をもたせておく．すなわち，(2.2) の m^2 を $m^2 - i\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ におきかえ，経路積分（2.4）を遂行したのち，$\varepsilon \to +0$ の極限をとる．このようなグリーン関数，あるいはその母関数 $Z[J]$

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i\int d^4x J(x)\phi(x)\right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi])} \tag{2.5}$$

が与えられると，(2.3) のような遷移振幅を求めることができる．実際，(2.5) の両辺に J の適当な汎関数をかけて J で経路積分すると，(2.3) の右辺を再現できることを示すのは難しくない．結局，場の量子化とは基本的には作用 $S[\phi]$ からグリーン関数 $G^{(n)}$ を求める操作のことであるといってよい.

2.2 摂動論と粒子描像

摂動論は次の項で述べるように本質的な限界をもつものではあるが，場の量子論の物理的な解釈の基礎なので少し詳しくまとめておこう．議論を具体的にするため，ϕ^4 理論（2.2）を考える．求めたい量はグリーン関数（2.4）であるが，右辺の経路積分を計算するために，まず作用（2.4）を場 ϕ の2次の部分 S_0 と高次の部分 $-V$ に分ける．

$$S = S_0 - V$$

$$S_0 = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \tag{2.6}$$

$$V = \int d^4x \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

これを $\exp(iS[\phi])$ に代入し，$S_0[\phi]$ は指数関数の肩に残し，V についてはテイラー展開する．すなわち，（2.4）の右辺の分子を次のように分解する．

$$\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-iV)^k \exp(iS_0[\phi]) \tag{2.7}$$

分母についても同様である．ここで，$S_0[\phi]$ は ϕ について2次としたから，（2.7）の各項はガウス積分となり簡単に評価できる．

具体的には，ウィックの定理と呼ばれる一般の m 次元のガウス積分に対する次の積分公式を使う．

$$\int d\phi_1 \cdots d\phi_m \phi_{i_1} \phi_{i_2} \cdots \phi_{i_n} \exp\left(i \sum_{k,l} \frac{1}{2} T_{kl} \phi_k \phi_l \right)$$
$$= (-2\pi i)^{\frac{m}{2}} (\det T)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\{(a_1,b_1),\cdots,(a_{n/2},b_{n/2})\}\text{は} \\ (1,2,\cdots,n)\text{の対への分解}}} (iT^{-1})_{i_{a_1} i_{b_1}} \cdots (iT^{-1})_{i_{a_{n/2}} i_{b_{n/2}}} \tag{2.8}$$

ここで，$\{(a_1, b_1), \cdots, (a_{n/2}, b_{n/2})\}$ が $(1, 2, \cdots, n)$ の対への分解であるとは，n 個のものからなる列 $(1, 2, \cdots, n)$ を $n/2$ 組の対に分解したものが $(a_1, b_1), \cdots (a_{n/2}, b_{n/2})$ であることを意味している．ここで各対 (a_1, b_1) における順序や，$n/2$ 組の対の並べ方は問題にしないとする．すなわち，（2.8）

の右辺の和は条件

（ｉ）　$a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ \cdots,\ a_{n/2} < b_{n/2}$

（ii）　$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n/2}$

（iii）　$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_{n/2}, b_{n/2}$ は $1, 2, \cdots, n$ の並べかえ

をみたすような $a_1, b_1, \cdots, a_{n/2}, b_{n/2}$ についての和としてよい．この公式で，右辺の始めの二つの因子 $(-2\pi i)^{m/2}(\det T)^{-1/2}$ は変数の次元 m に強く依存しているが，グリーン関数（2.4）を評価するときには，分母と分子でキャンセルしてしまうので忘れてよい．結局，グリーン関数の計算に必要なのは，T^{-1} すなわち２次形式 $S_0[\phi]$ の逆核だけである．S_0 は

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2}\phi(-\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi \tag{2.9}$$

と書けるから，T に相当するものはいまの場合クライン‐ゴルドン演算子

$$T = -\partial_\mu\partial^\mu - m^2 \tag{2.10}$$

であり，その逆核は，

$$\langle x|T^{-1}|y\rangle = D(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \tag{2.11}$$

で与えられる．これを粒子のプロパゲータと呼んでいる．

これを使うと，公式（2.8）はいまの場合，

$$\int \mathcal{D}\phi \exp(iS_0[\phi]) = \text{const} \tag{2.12a}$$

$$\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2) \exp(iS_0[\phi]) = \text{const}\cdot iD(x_1, x_2) \tag{2.12b}$$

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\phi\, &\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \exp(iS_0[\phi]) \\ &= \text{const}\cdot(iD(x_1, x_2)iD(x_3, x_4) + iD(x_1, x_3)iD(x_2, x_4) \\ &\qquad + iD(x_1, x_4)iD(x_2, x_3))\end{aligned} \tag{2.12c}$$

などと書けることがわかる．ここで，右辺の const は $(-2\pi i)^{m/2}(\det T)^{-1/2}$ に対応するものであるが，上に述べた理由により，グリーン関数を求める際には忘れてよい．

ここで，プロパゲータ $D(x, y)$ を粒子が x から y へ伝播するプロセスを表していると解釈すると，たとえば（2.12c）の右辺の三つの項は，時空の四つの点 x_1, x_2, x_3, x_4 が粒子の伝播で結ばれる3通りの仕方についての和と解釈できる．（2.6）に与えられたように V が ϕ の4次式であっとことを思いだすと，たとえば4点のグリーン関数の場合，（2.7）は図2のようなプロセスの和として解釈できることがわかるだろう．図2で，第1行は（2.7）で $k=0$ の寄与すなわち摂動のゼロ次を表す．第2行は $k=1$ すなわち摂動の1次の寄与であり，ϕ^4 相互作用の点 x は時空の全領域で積分される．このように考えると，グリーン関数はいくつかの粒子が V で表される相互作用をしながら伝播していくというプロセスに対応していることがわかるであろう．

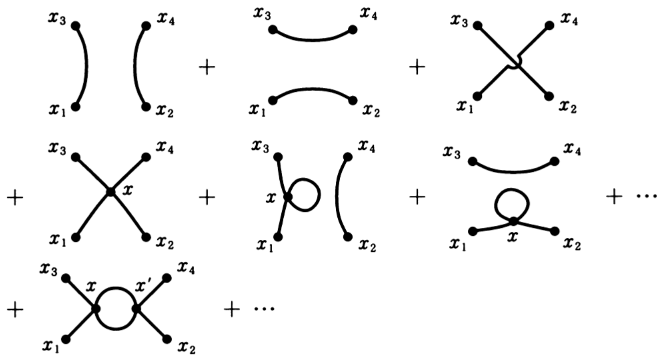


図2　ϕ^4 理論の摂動展開（4点のグリーン関数）

このような粒子描像は相対論的な第1量子化ともいうべきものであるが，粒子の経路に関する次のような経路積分を考えることによってもそれを定式化することができる．いま，自由粒子の相対論的な伝播を考えるために，図3のように時空の2点 x と y を結ぶ経路についてのたし上げを考える．ここで粒子の軌道を $X^\mu(\tau)$ とし，作用は各

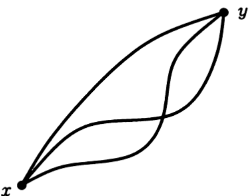


図3　相対論的な粒子の経路積分

軌道の4元長さとする.

$$S_1[X] = -m\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu}\,d\tau \tag{2.13}$$

これは明らかに軌道の reparametrization すなわち変数 τ のとりかえに対して不変であるが，X^μ についての2次形式ではないので経路積分の定義をどうすればよいか定かではない．そこで，(2.13) と少なくとも古典力学的には等価であるが，X^μ の2次形式になっているような作用をもってくることにする．すなわち，

$$S[X,g] = -\int d\tau\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}g^{-1}\eta^{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu + \frac{m^2}{2}\right) \tag{2.14}$$

を考える．ここで g はパラメーター τ の空間の計量テンソルであるが，いまの場合パラメーター空間は1次元であるから，1行1列の行列すなわち1成分量にすぎない．(2.14) は曲がった D 次元時空中でのスカラー場の作用

$$\int d^Dx\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi^i\partial_b\phi^i + \frac{\kappa}{2}(\phi^i)^2 + \lambda\right) \tag{2.15}$$

と本質的に同じ形である．すなわち，(2.15) で $D=1$ とし，ϕ^i を X^μ に対応させ，$\kappa=0$, $\lambda=\frac{m^2}{2}$ とすると (2.14) が得られる．つまり，(2.14) は1次元の重力場 g と結合したスカラー場 X^μ の作用と解釈できる．この解釈のもとで $\frac{m^2}{2}$ は1次元の宇宙項とみなせる．このような見方は，粒子の伝播を考える上ではあまり御利益はないが，弦理論の分析の際には重要となってくる．

古典力学的には (2.14) が (2.13) と等価であることを見るために，(2.14) を g で変分してゼロとおくと

$$\eta^{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu - m^2 g = 0 \tag{2.16}$$

が得られる．これを g について解いて (2.14) に代入すると (2.13) と一致することはすぐにわかる．量子力学的にも (2.13) と (2.14) が等価であるかどうかは，経路積分をどのように定義するかに依存している．結果から先にいうと，(2.14) の形の作用から出発して，reparametrization 不変な測

度によって経路積分を定義すると，場の理論の摂動展開と一致する結果が得られる．すなわち，プロパゲータ（2.11）は（2.14）で与えられる粒子の作用を使って，

$$D(x, y) = \int_{\text{両端は}\, x \,\text{と}\, y} \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}g}{\mathrm{vol}(\mathit{Diff})} e^{iS[X,g]} \tag{2.17}$$

と書ける．ここで経路積分の測度 $\mathcal{D}X$, $\mathcal{D}g$ はそれぞれ $X^{\mu}(\tau)$, $g(\tau)$ 全体のなす関数空間の上での計量

$$\begin{aligned} \| \delta X^{\mu} \|^2 &= \int d\tau \sqrt{g} (\delta X^{\mu}(\tau))^2 \\ \| \delta g \|^2 &= \int d\tau \sqrt{g}\, g^{-2} (\delta g)^2 \end{aligned} \tag{2.18}$$

から自然に誘導される体積とし，vol(*Diff*) は reparametrization 全体のなす体積である．これらは無限次元の体積であり，必ずしも自明なものではないが，適当な正則化によって不定性なく評価でき，（2.17）が成り立っていることを示すことができる（文献［1］参照）．

ここで議論したように，場の理論の摂動級数はお互いに相互作用しながら伝播している多粒子系の時間発展を表しており，物理的な直観とよく一致している．実際，歴史的にも，まずファインマンが粒子描像から出発した直観的な考察により上のような結果を得たのち，ダイソンによって場の理論的な裏付けがなされたのである．しかしながら，次に議論するように，摂動論には本質的な限界があり，それを克服するためには摂動論に依存しないような定式化が必要となってくる．

2.3　非摂動効果

摂動論の限界について議論するため，最も簡単な具体例として ϕ^4 理論（2.2）で時空が 0 次元の場合を考えよう．すなわち，グリーン関数 $G^{(n)}$ として，単に 1 変数 ϕ についての積分

$$G^{(n)} = \frac{\int d\phi\, \phi^n \exp\left\{i\left(-\frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4\right)\right\}}{\int d\phi \exp\left\{i\left(-\frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4\right)\right\}} \tag{2.19}$$

を考える．さらに簡単のため，ここでは（2.19）の分母

$$Z = \int d\phi \exp\left\{i\left(-\frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4\right)\right\} \tag{2.20}$$

だけを議論することにしよう．摂動展開とは λ によるテイラー展開のことであったから，いまの場合

$$Z = \int d\phi\, e^{-i\frac{m^2}{2}\phi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-i\lambda}{4}\right)^k \phi^{4k} \tag{2.21}$$

となる．本当は以下で見るように項別積分はできないが，形式的に項別に積分を行なうと

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k \\ c_k &= \frac{\sqrt{-2i}}{m}\left(\frac{i}{m^4}\right)^k \frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{2}\right)}{k!} \end{aligned} \tag{2.22}$$

となる．k が大きいとき，c_k は $k!$ に比例して大きくなるから，（2.22）の収束半径はゼロである．すなわち，（2.22）は（2.20）の漸近展開にはなっているが，収束する級数ではないのである．

このように摂動展開は一般に漸近展開ではあるが，通常の意味のある場の理論では，ほとんどの場合収束級数にはなっていない．Γ 関数のスターリングの公式などからもよく知られているように，漸近展開が思いのほかよい近似であることも多いが，実際，場の理論でもさまざまな場合に，摂動論がよい近似になっている．一方，量子色力学におけるクォークの閉じ込めや，高温領域の電弱相互作用におけるバリオン数非保存など，本質的に摂動論の枠組では扱えないような現象も多い．そのように摂動論では扱えないような効果を総称して，**非摂動効果**と呼んでいる．以下の節で議論していくように，重力の量子論ではいろいろな意味で非摂動効果が本質的に重要であり，量子重

力とは重力あるいは弦理論の非摂動効果を理解する試みであるといっても過言ではない．そのためには，通常の場の理論ではどのようにして非摂動効果が理解できたかを復習しておくのも無駄ではないと思われるので，以下にまとめておこう．

(a) 場の構成的定義

場の量についての経路積分を定義するために，時空を格子に分け，場とは各格子点あるいは隣りあった格子点をつなぐ辺などの上で定義された量と考えると，経路積分は自然に普通の多重積分とみなせる．例として ϕ^4 理論（2.2）を考え，また，後の便宜のため時間をユークリッド化しておく．すなわち，(2.2) で時間を $x^0 = -ix^4$ としておく．そうすると考えるべき経路積分は

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_E[\phi]} \phi(x_1) \cdots \phi(x_j) \tag{2.23a}$$

$$S_E[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right) \tag{2.23b}$$

のようなものとなる．時空を図4のように格子間隔 a の格子とみなし，場の量 $\phi(x)$ とは各格子点 n で定義された量 ϕ_n のこととすると，(2.23b) は

$$S_{格}[\phi] = \sum_n a^4 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{4} \left(\frac{\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi_n^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_n^4 \right\} \tag{2.24b}$$

のように書け，経路積分（2.23a）は

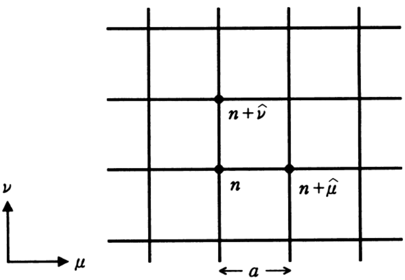


図4　時空を格子に分ける．

$$\int \prod_n d\phi_n e^{-S_{格}[\phi]} \phi_{n_1} \cdots \phi_{n_j} \tag{2.24a}$$

のように普通の多重積分としてよいであろう．もう少し厳密にいうと，まず格子間隔 a と時空の体積 V を有限とすると，格子点の数は有限個（つまり V/a^4 個）となるから，(2.24a)，(2.24b) によって積分は完全に定義できる．次に体積 V を無限大にする極限として，無限に拡がった格子上でのグリーン関数が定義され，最後に格子間隔 a をゼロにする極限として連続理論を定義するのである．

このように，時空をいったん離散化することによって経路積分を定義する方法を **場の構成的定義** と呼んでいる．これは最も素朴な考え方であるが，同時に場の量子論の最も根源的な定義であり，構成的な定義がなされて初めて場の理論が定義できるといってもいい過ぎではない．

ここで考えているような格子間隔をゼロにする極限のことを **連続極限** と呼んでいるが，いくつかの注意が必要である．特に，我々がほしいのは量子力学的な連続極限であって，古典力学的なものとは違うことは重要である．すなわち，古典力学的な連続極限では運動方程式あるいは作用を有限にするのに対し，量子力学的な連続極限ではグリーン関数を有限にするような極限をとらなければならない．具体的に ϕ^4 理論の場合でいうと，(2.24b) で与えられた格子上の作用で，m と λ を固定して a をゼロにする極限をとると，連続の作用 (2.23b) が得られることは明らかであるから，ϕ^4 理論を古典力学として記述するときは，そのような極限でよい．一方，量子力学的な連続極限を考えるときは，2体のグリーン関数，4体のグリーン関数，… を有限にするような極限をとらなければならない．いいかえると，a をゼロにすると同時に作用に現れるパラメーター（いまの場合 (2.24b) の m と λ）も a の関数としてうまく連動させてやる必要がある．このように，格子上の作用を格子間隔 a に依存してうまく選び，グリーン関数を $a \to 0$ の極限で有限にしてやる操作のことを **くりこみ** と呼んでいる．

くりこみとは上に述べたように格子上の作用を a の関数として微調整してやることであるが，そう考えると自然に次のようなことが問題になるであろう．まず，くりこみのためには作用に現れるパラメーターのうちのいくつをどのように微調整する必要があるのか．また，連続極限をとった結果の理論はいくつのパラメーターをもつのか．さらに，古典力学的な連続極限が一致するような格子上の作用は無数にあるが（たとえば（2.24b）でニアレストネーバー以外の項をつけ加えても適当に係数を選べば $a\to 0$ で（2.23b）になり得る），量子力学的な連続極限でもこれらは等価であるか．

このような問題は，ウィルソンをはじめとする人々によって開発された**くりこみ群**の方法を使って，大体よく理解されている．その結果を以下に大まかにまとめておこう（[2] 参照）．まず，連続極限が自由場になってしまう場合，すなわち，作用が場の量の2次式とみなせる場合を考える（たとえば，（2.23b）で $\lambda=0$ の場合）．次に自由場の作用を少し変形して，相互作用項をつけ加えてみる．たとえば D 次元のスカラー場の場合，作用として

$$S=\int d^Dx\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda_4}{4!}\phi^4+\frac{\lambda_6}{6!}\phi^6+\cdots\right) \tag{2.25}$$

の形のものを考え，$\lambda_4,\lambda_6,\cdots$ を自由場からのずれと考える．次元解析をすれば明らかに，

$$[\phi]=L^{1-\frac{D}{2}} \tag{2.26}$$

であり，これから

$$[\lambda_k]=L^{-2+\left(\frac{D}{2}-1\right)(k-2)} \tag{2.27}$$

がわかる．ここで，結合定数 $\lambda_4,\lambda_6,\cdots$ のうちで L のベキが正のものを**超くりこみ可能**，負のものを**くりこみ不可能**であるという．これは，自由場のまわりで摂動展開したときの振る舞いを区別している．実際，次元解析から明らかなように中間状態のエネルギーが大きくなったとき，超くりこみ可能な結合定数の寄与はどんどん小さくなるのに対し，くりこみ不可能な結合定数の寄与は大きくなってくる．いいかえると，格子上の作用の連続極限をとる

際に，超くりこみ可能な結合定数は無理なく導入できるが，くりこみ不可能な結合定数を連続極限で残そうとすると，$a \to 0$ とともに格子上の作用をどんどん変形してやる必要がある．それゆえ，少なくとも自由場の作用を小さく変形して得られる理論は，くりこみ不可能な結合定数をもたないと思われる．もちろんこの議論は自由場に近い理論ということを前提にしており，本質的に強い結合をもった理論，すなわち自由場からはほど遠い理論ではもっとほかのパターンが現れるかもしれない．しかしながら，現在までのところ，そのような理論はまだ発見されていないし，自然界の基本法則も重力場以外はすべてくりこみ可能な作用で記述できている．

重力のアインシュタインの作用はくりこみ不可能であるから，上のように考えるともちろん自由場の小さな変形として量子論をつくることはできない．しかし，構成的に定義して自由場のそばにはないような連続極限がとれるかどうかを調べることは大変有意義なことであり，次節以降で述べるようないくつかの発展がある．

(b) シュヴィンガー-ダイソン方程式

非摂動効果を取り扱うもう一つの典型的な方程式がシュヴィンガー-ダイソン方程式（以下S-D方程式と略す）であるが，これも重力あるいは弦理論に応用できるかもしれないので，少し詳しく議論しておこう．n 点のグリーン関数は（2.4）で与えられたが，これらに対して成り立つ次のような関係式がS-D方程式である．まず，自明な式

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp(iS[\phi])\} = 0 \tag{2.28}$$

を考え，被積分関数を積の微分の公式により計算すると，

$$\int \mathcal{D}\phi \sum_{k=1}^{n}\phi(x_1)\cdots\delta(x_k-x)\cdots\phi(x_n)\exp(iS[\phi]) + \int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, i\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\exp(iS[\phi]) = 0 \tag{2.29}$$

が得られる．この両辺を $\int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi])$ で割ることによって得られるグ

リーン関数間の関係式を**S-D 方程式**と呼んでいる．これはもちろん無限個の連立方程式であり，実際の問題で厳密に解くのは難しいが，うまく近似的に解くことにより，非摂動効果の分析に使える．

例として，2次元の $O(N)$ 対称な非線型シグマ模型

$$S = \int d^2x \frac{1}{g^2}\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\varphi})^2 - \frac{1}{2}\lambda(x)(\vec{\varphi}(x)^2 - 1)\right\} \tag{2.30}$$

を考えよう．ここで $\vec{\varphi}(x)$ はN成分のスカラー場であり，場 $\lambda(x)$ は拘束条件 $\vec{\varphi}(x)^2 = 1$ をみたすようにするために入れたラグランジュ未定乗数である．グリーン関数を $\langle \varphi^a(x)\varphi^b(y)\rangle$ などと書くことにすると，

$$\int \mathcal{D}\vec{\varphi}\,\mathcal{D}\lambda \frac{\delta}{\delta\varphi^a(x)}(\varphi^b(y)\exp(iS)) = 0 \tag{2.31}$$

より，

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle \varphi^a(x)\varphi^b(y)\rangle - \langle \lambda(x)\varphi^a(x)\varphi^b(y)\rangle = i\delta^{(2)}(x-y)\delta^{ab}g^2 \tag{2.32}$$

が得られ，

$$\int \mathcal{D}\vec{\varphi}\,\mathcal{D}\lambda \frac{\delta}{\delta\lambda(x)}(\exp(iS)) = 0 \tag{2.33}$$

より，

$$\langle \vec{\varphi}^2(x)\rangle = 1 \tag{2.34}$$

が得られる．ここで，次の近似

$$\langle \lambda(x)\varphi^a(x)\varphi^b(y)\rangle = \langle \lambda(x)\rangle\langle \varphi^a(x)\varphi^b(y)\rangle \tag{2.35}$$

を導入し，さらに並進不変性より

$$\langle \lambda(x)\rangle = m^2 \quad (\text{定数}) \tag{2.36}$$

とすると，(2.32) より

$$\langle \varphi^a(x)\varphi^b(y)\rangle = g^2\delta^{ab}\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}e^{ip(x-y)}\frac{i}{p^2 - m^2 + i0} \tag{2.37}$$

となり，これを (2.34) に代入すると，m を決める式

$$g^2N\cdot\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{i}{p^2-m^2+i0} = 1 \tag{2.38}$$

が得られる．$p^0=ip^2$ とおき，ユークリッド化すると，Λ をカットオフとして（2.38）は

$$g^2N\cdot\int_{|p|<\Lambda}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{p^2+m^2} = 1 \tag{2.39}$$

と書ける．これを m について解くと

$$m^2 = \frac{\Lambda^2}{\exp\dfrac{4\pi}{g^2N}-1} \tag{2.40}$$

が得られるが，これは $g^2=0$ のまわりで真性特異点になっており，その漸近展開は

$$m^2 \simeq 0+0\cdot g^2+0\cdot g^4+\cdots \tag{2.41}$$

である．すなわち，粒子の質量 m は摂動論の全次数でゼロであるが，非摂動効果も考えると（2.40）程度の量であることがわかった．

（c）その他の非摂動的取り扱い

以上に述べたもの以外にも，場の非摂動効果を取り扱う方法はいくつか考えられているので，それらを列挙しておこう．まず準古典近似あるいは WKB 近似を場の理論の場合に拡張したものが考えられる．もう少し詳しくいうと，ユークリッド化した場の理論における経路積分

$$\int\mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}F[\varphi] \tag{2.42}$$

に現れる場の配位のうちで，$S[\varphi]$ を停留値にするようなものだけを考えても十分よい近似になっていると考えるのである．すなわち，$S[\varphi]$ の古典解が τ でパラメトライズできて，

$$\varphi(x) = \varphi_{cl}(x,\tau) \tag{2.43}$$

と書けるとき，（2.42）を τ による積分と古典解のまわりの積分に分けて，

$$\int d\tau\mu(\tau)e^{-S[\varphi_{cl}(\tau)]}\int\mathcal{D}\tilde{\varphi}e^{-S_2[\varphi_{cl},\tilde{\varphi}]}F[\varphi_{cl}(\tau)+\tilde{\varphi}] \tag{2.44}$$

と近似するのである．ここで，S_2 は S を φ_{cl} のまわりで展開したときの２次の項である．

$$S[\varphi_{cl}+\tilde{\varphi}] = S[\varphi_{cl}] + S_2[\varphi_{cl}+\tilde{\varphi}] + O(\tilde{\varphi}^3) \tag{2.45}$$

このような近似は**インスタントン近似**と呼ばれており，通常の場の理論ではいわゆる $U(1)$ 問題の解決などの定性的な性質の分析には有力であるが，必ずしもよい近似とは限らないことが多く，万能なものではない．しかしながら，$N=2$ の超対称性をもつ場合などインスタントン近似が厳密な結果を与える場合もあり，それなりに有効なものでもある（[3] 参照）．

非摂動効果を議論するのに，**デュアリティ**と呼ばれる性質が使えることもある．一般に，結合定数が十分に小さく自由場に近いときは摂動展開がよい近似であるが，逆の場合には摂動級数はほとんど無意味になってしまう．しかしながら，ある種の特別な場の理論では場の量をうまく変換してやると別の場の理論に写り，しかも一方の強結合領域が他方の弱結合領域になっていることがある．たとえば２次元イジング模型におけるクラマース-ワーニエのデュアリティなどがその典型である．一般に，任意の場の理論がこのようなデュアリティをもっているとは限らないが，$N=2$ の超対称性をもつ場合に低エネルギー有効作用がデュアリティをもつことからその形を決定できたり（[3] 参照），弦理論の特別な真空の間にもデュアリティが成り立つことが知られている（[4] 参照）．

通常の摂動展開が結合定数によるベキ展開であるのに対し，理論の他のパラメーターについて展開することによって非摂動効果を分析することも可能である．たとえば，場の内部自由度を N としたとき（(2.30) の $\vec{\varphi}$ の成分の数 N など），グリーン関数を $1/N$ で展開することができる（[5] 参照）．実際，(2.35) で行なった近似は $1/N$ 展開の０次近似であることを示すことができる．また，時空の次元 D をパラメーターとした展開も可能であり，特にスカラー場に対しては，$\varepsilon=4-D$ による展開がよい近似であることが知られているし（[2] 参照），重力に対しては $\varepsilon=2-D$ による展開が有効であるように見

える（[6] 参照）．

3° 標準模型と重力の量子化の困難

基本的な相互作用のうちで重力以外のものは，標準模型として今やほぼ完全に理解されているといってよい．標準模型は，ゲージ群が $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ であり，フェルミオン的な物質場としてクォークおよびレプトン，ボソン的な物質場としてヒグス場をもっている．このうち $SU(2)\times U(1)$ の部分は弱い相互作用と電磁相互作用であり，宇宙初期の高温状態のときなどの例外を除くと摂動論による記述が非常によい近似になっている．一方，標準模型の $SU(3)$ の部分は強い相互作用であり，ある種の高エネルギーの散乱現象以外には摂動論は使えないが，構成的な定義，すなわち格子ゲージ理論によりその振る舞いは完全に理解されている．宇宙初期のバリオン生成や強い相互作用による CP の破れなど，標準模型のダイナミクスのうちでもまだ完全に理解されていないものもあるが，これらはいわば知られている場の理論を解くという問題であり，場の理論の枠組の本質を変えるようなものではないと思われる．

標準模型のダイナミクスが比較的簡単に理解できたのは，それらがくりこみ可能であったからである．前節でも議論したように，理論がくりこみ可能であるということは，すべてのエネルギー領域にわたって場のダイナミクスが自由場に近いということであり，たとえ強い相互作用の低エネルギー領域における場合のように摂動論が使えなくなったとしても，構成的な場の連続極限などの振る舞いが容易に理解できたわけである．

ところが重力の場合は，万有引力の式 $F=G\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{r^2}$ からもわかるように，粒子のエネルギー $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ とともにどんどん結合定数が大きくなってしまう，つまりくりこみ不可能である．G を m_{P}^{-2} と書いたとき，m_{P} はおよそ $10^{19}\,\mathrm{GeV}$ であり，m_{P} のことをプランク質量と呼んでいる．万有引力の式は粒子のエネ

ルギーが m_{P} に比べて小さいときは重力は単なる小さな摂動であるが，エネルギーが m_{P} 程度になるときわめて大きい量子補正をもつことを意味している．すなわち，重力の量子論を考えるためには，本質的に摂動論を超えたダイナミクスを調べることが必要になるわけである．そのための枠組として現在のところ二つのものが考えられる．その一つは他の相互作用と同様に局所場として重力を構成的に定義する試みであり，もう一つが弦理論である．これらについては次の二つの節で議論するが，その前に重力の量子化の概念的な問題をまとめておこう．

第一の問題は，時空とは何かということである．重力とは古典論的には時空のゆがみのことであるから，それを量子化するということは，いろいろなゆがみ方をした時空を重ね合わせることだといえる．実際，時空が十分遠方では平坦になっているような場合だけを考えるのであれば，少なくとも形式的には，平坦な時空のまわりでの重力子の場の理論として重力場を定式化できる．しかしながら，ゆらぎの大きい時空の効果もとり入れようとすると，通常の場の理論の枠組はほとんど使えなくなってしまう．まず，時空が遠方で大きくゆらいでいれば，漸近状態やS行列が定義できないため，何が物理量であるかがわかりにくくなってしまう．また，計量のゆらぎを考えるということは，時間の概念がアプリオリには定まっていないということであり，波動関数の時間発展などということも考え直す必要がある．実際，よく言われるようにアインシュタインの作用 $S=\kappa\int d^4x\sqrt{-g}\,R$ から出発して，正準量子化により得られる体系（ホィーラー－ドウィット方程式）には時間変数は現れない．波動関数の時間発展が意味を失うということは，理論のユニタリティや波動関数の内積なども意味を失うことになる．しかしながら，適当にゲージ固定を導入すればふつうに時間変数が入ってくることも事実であり，上の問題がどのていど量子重力の根幹にかかわる問題なのかは定かでない．

時空のゆらぎに関する別の問題として，トポロジー変化の問題がある．たとえば，ある時刻における宇宙の構造が3次元球面 S_3 のようになっていたと

する．このときどんな時刻においても宇宙は S_3 でありつづけるとするべきなのか，あるいは宇宙が二つの S_3 に分裂するようなプロセスも考えるべきかという問題である．これは経路積分的に考えれば，経路積分すべき計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ が定義されている4次元多様体として，固定されたトポロジーのものだけを考慮するのか，あるいは種々のトポロジーをもつものについてたし上げるのかという問題である．どちらが正しいのかを決める先験的な理由はないが，後者の方が時空のトポロジーを決めるという余分の情報を必要としないという意味で自然であろう．

もう少し技術的ではあるが，おそらく難問として残りそうなものに宇宙項の自然さの問題がある．これを議論するためにまず，巨視的なスケールにおける重力がアインシュタインの作用

$$S = \kappa\int d^4x\sqrt{-g}\,R + \lambda\int d^4x\sqrt{-g} \tag{3.1}$$

の形に書けることは，一般座標変換に対する不変性からのきわめて一般的な帰結であることを思いだしておこう．仮定として，基本法則がどのようなものであるかの細かい点は問題にしないが，とにかくそれは一般座標変換に対する不変性をもっており，巨視的には十分なめらかな時空を記述しているとする．そうすると，巨視的な計量 $g_{\mu\nu}(x)$ に対する有効作用は

$$\begin{aligned} S &= \kappa_0\int d^4x\sqrt{-g} + \kappa_2\int d^4x\sqrt{-g}\,R \\ &\quad + \kappa_4'\int d^4x\sqrt{-g}\,R^2 + \kappa_4''\int d^4x\sqrt{-g}\,R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \cdots \end{aligned} \tag{3.2}$$

のように書けるはずである．ここで右辺に現れる微分の数は，第1項では0個，第2項では2個，第3項と第4項では4個，… となっている．ここで，系を記述する基本法則がただ一つの質量スケール m をもっていると仮定しよう．このとき，次元解析より

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= c_0 m^4, & \kappa_2 &= c_2 m^2 \\ \kappa_4' &= c_4' m^0, & \kappa_4'' &= c_4'' m^0, \quad \cdots \end{aligned} \tag{3.3}$$

となるが，特別なことがない限り $c_0, c_2, c_4', c_4'', \cdots$ はオーダー1の量である．そうすると，計量場 $g_{\mu\nu}$ が長さ m^{-1} に比べて十分ゆっくりと変化するときは，(3.2) の右辺の始めの方の項ほど大きく寄与することは明らかである．このように考えると，低エネルギーの有効作用に高階の微分，すなわち (3.2) の右辺の κ_4', κ_4'' 以下の項が不必要であることは自然に理解できる．しかし，(3.2) の右辺の第1項，すなわち宇宙項に関しては，我々の自然界は上のような素朴な考察とは著しく異なっている．実際，κ_2 は万有引力定数 G の逆数であり，プランク質量 $m_P = 10^{19}$ GeV の2乗程度の量 $\kappa_2 \sim m_P^2$ である．よって，もし上のように素朴に考えると宇宙定数 κ_0 は m_P の4乗程度の量 $\kappa_0 \sim m_P^4$ となるはずであるが，宇宙論的な観測によると，κ_0 は $(10\ \mathrm{meV})^4$ 程度より小さくなくてはいけない．これは上のような素朴な評価 $(10^{19}\ \mathrm{GeV})^4$ に比べると100桁以上も小さく，いいかえると，現実の自然界における宇宙項を説明するためには，基本法則に現れるパラメーターを100桁以上の精度で微調整してやらなければならないことを意味している．これを**微調整の問題**，あるいは**自然さの問題**と呼んでいるが，もちろんこれは逆にいうと，基本法則に現れるパラメーターの一つを微調整してやればよいということであり，理論に矛盾があるといっているわけではない．いずれにしても100桁以上も異なる量が理論に現れるのは不自然であり，なんらかの未知のメカニズムがあるはずである．

同様な自然さの問題は，ヒグス粒子などのスカラー粒子の質量についても現れる．すなわち，ヒグス粒子の質量は 100 GeV から高々数 100 GeV 程度であるが，これに比べて GUT スケール 10^{16} GeV は不自然に大きい．このようなスカラー粒子の質量の自然さの問題は，超対称性の導入により比較的うまく説明できる．しかしながら，宇宙項の不自然さは非常に大きなものであり，単純な超対称性の導入では解決できるとは思われない．おそらく弦理論の非摂動的なダイナミクスなどによって初めて解決されるのだと思われる．（重力の非摂動効果の結果として宇宙項の自然さを説明する試みとしては，たと

えば［7］を見よ.）

上にも述べたように現在のところ，重力の量子論を構成するための基本的な枠組として，局所場の理論と弦理論の2通りが考えられる．これらの二つは必ずしも異なったものではなく，できあがったものは等価である可能性もあるが，一応以下ではそれぞれの場合を個別に議論しておこう.

4° 局所場としての量子重力

4.1　量子重力の構成的定義

前節までで見てきたように，重力の作用はくりこみ可能ではないため，プランク質量に近いエネルギー領域では本質的に非摂動効果が重要になってくる．通常の場の理論では，非摂動効果を取り扱う最も正統的な枠組は構成的な定義であったから，重力の場合にもそれを試みるのは自然である．量子重力の構成的定義の試みの一つとして，この数年の間精力的に研究されているのが以下に述べる**力学的単体分割**（dynamical triangulation）である.

簡単のため，物質場がなくて重力場だけからなる系を考え，また時間は純虚数に解析接続して，計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ がユークリッド型の符号をもつようにしておこう．行なうべき経路積分を形式的に書くと，

$$Z = \int \mathcal{D}g\, e^{-S_E[g]} \tag{4.1a}$$

$$S_E[g] = \kappa \int d^4x \sqrt{g}\, R + \lambda \int d^4x \sqrt{g} \tag{4.1b}$$

であり，ここで，計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ は与えられたトポロジーをもつ4次元多様体 M 上のものとする．このような理論を格子化しようとするとき，最も素朴な試みは多様体 M を十分に細かく単体分割することであろう．そのとき，M 上に計量を与えるということは，M 上の近接した2点の距離を定めるということであるから，結局，単体分割に現れる各1単体の長さを定めることである.

そのように考えると，(4.1) を格子化したものとして

$$Z_{格子} = \int \prod_{i は 1 単体} dl_i e^{-S_{格子}[\{l_i\}]} \tag{4.2}$$

をとるのが自然であろう．ここで，l_i は 1 単体 i の長さであり，$S_{格子}[\{l_i\}]$ はすべての 1 単体の長さを決めたときの多面体 M に対する作用 (4.1b) である．このように，M の単体分割の仕方は固定して，各 1 単体の長さを力学変数とみなすやり方を**レッジェ・カリキュラス**と呼んでいる．

レッジェ・カリキュラス，すなわち (4.2) で量子重力を定式化しようとするのはごく自然なことであるが，以下で見るように，このやり方では重力の最も本質的な性質であるはずの，一般座標変換に対する不変性が少なくとも自動的にはみたされていない．この事情を理解するためには，理論が一般座標変換に対して不変であるということが，量子論的には何を意味しているのかを考える必要がある．イメージを明確にするために，経路積分 (4.1) を統計力学の状態和とみなそう．すなわち，固定された多様体 M 上の計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ が熱的にゆらいでおり，そのボルツマン・ウェイトが $e^{-S_E[g]}$ であると考える．次に，図5のように M 上に二つの同相な領域 D_1 と D_2 をとり，D_1 を D_2 に写す同相写像を f とする．いま，(4.1) の作用 S_E も測度 $\mathcal{D}\varphi$ も一般座標変換に対して不変であるとすると，領域 D_1 上での計量のゆらぎ方は，それを f で写すことによって領域 D_2 上での計量のゆらぎ方と一致するはずである．

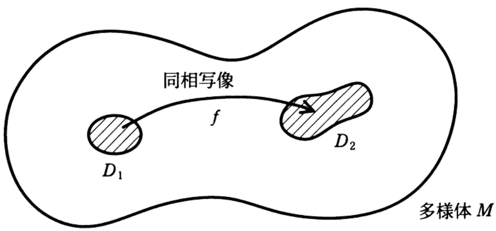


図5 M 上の同相な領域 D_1, D_2 上での計量のゆらぎ方は同じである．

このような性質は物質場についても同様だから，結局，重力の量子論すなわち一般座標変換に対する不変性をもつ理論では，同相な領域はすべて等価であり，その上での場のゆらぎは本質的に同型になるべきであることがわかる．ところが，レッジェ・カリキュラスでは，図6のように同相である領域も一般には異なる単体分割の構造をもっているため，場のゆらぎが同型であるということを簡単に定義することさえできない．もちろん，ローレンツ不変性やカイラル不変性のように，格子化された理論にはない対称性でも，連続極限をとったあとの理論にはあるということはよくある．それゆえ，レッジェ・カリキュラスでも連続極限をとったあとでは一般座標変換に対する不変性が回復していないとは限らない．しかしながら，あとで見るように，時空が2次元の場合は少なくとも素朴な作用（4.2）では正しい連続極限にはならないことが知られている．

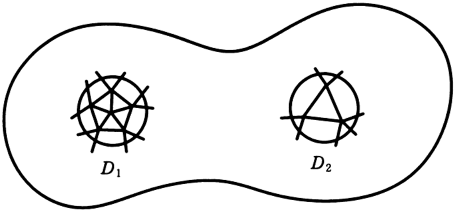


図6　レッジェ・カリキュラスでは同相な領域も一般には異なる単体分割をもつ．

上に述べたようなレッジェ・カリキュラスの欠点を補うためには，状態和 Z において M の単体分割を固定せずに，すべての可能な単体分割についてもたし上げてしまえばよいと思われる．これは経路積分において，単体分割の仕方自体を力学変数のようにたし上げるという意味で，力学的単体分割と呼ばれている．このようにすると，連続極限での一般座標変換に対して不変な理論が本当にできるという厳密な証明はないが，力学的単体分割では多様体 M 上の各点のまわりでいろいろなパターンの単体分割が独立に出現するため，各点のまわりにおける場のゆらぎは同型であるといえる．このように考える

と，一般座標変換に対する不変性を保証しているのは，すべての可能な単体分割についてたし上げるという操作であり，作用の型は重要ではない．第3節で議論したように，いったん一般座標変換に対する不変性がみたされれば，一つのパラメーターの微調整によって，低エネルギーではアインシュタイン重力に帰着するような量子論がつくられると期待される．もちろん，4次元ではアインシュタインの作用はくりこみ不可能であるから，2.3項（a）で議論したように，量子論が存在するとしても自由場からはかけ離れたものであるはずであり，それがどのような性質をもつのか予想するのは難しい．

次の項で見るように，2次元では厳密解が求まるため，力学的単体分割がたしかに連続極限で一般座標変換に対して不変な理論になっていることを具体的にチェックできる．一方，時空の次元が3以上のときは，モンテ・カルロ計算によって精力的に調べられているが，いまのところ確定した結論には至っていないようである．

4.2　2次元量子重力とランダム面

量子重力は上に述べたように明らかでない点も多く，場の量子論の難問の一つであるが，2次元の場合は厳密に扱えるためいくつかの手がかりを得ることができる．2次元量子重力が興味をもたれている理由には，それが4次元量子重力のモデルであるということのほかに，弦理論の第1量子化が数学的には2次元重力と等価であるということもある．この10年の2次元重力の発展は二つの点に要約できる（[8] 参照）．一つは力学的単体分割が2次元の場合は正しい連続極限を与えることが示されたことであり，もう一つはそれを使って特殊な弦理論の非摂動効果の完全な記述が得られたことである．

2次元における力学的単体分割，すなわちすべての可能な3角分割をたし上げるという問題は，行列模型と呼ばれるものによって解くことができる（[5] 参照）．いま，ϕ を N 行 N 列のエルミート行列とし，次のような ϕ についての積分を考える．

$$Z = \int d\phi\, e^{-S(\phi)} \tag{4.3a}$$

$$S = N\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\phi^2 - \frac{\kappa}{3}\operatorname{tr}\phi^3\right) \tag{4.3b}$$

これは時空がゼロ次元の場合の行列値のスカラー場の経路積分とも考えられる．そうすると，通常の場の理論と同様に，$\log Z$ は連結なファインマン図の和となるが，いまの場合時空はゼロ次元であるから，各グラフの値は自明に求めることができ，

$$\log Z = N^2 w_2 + N^0 w_0 + N^{-2} w_{-2} + \cdots \tag{4.4}$$

の形に書けることがわかる．ここで，w_χ は

$$w_\chi = \sum_{A=0}^{\infty} \kappa^A n_\chi(A) \tag{4.5}$$

であり，$n_\chi(A)$ はオイラー数が χ であるような向きづけ可能な閉じた面を，A 枚の3角形に3角分割する仕方の数である．すなわち，与えられたトポロジーをもつ面を3角分割する仕方の数を求めるためには，(4.3) の積分の N^{-2} による漸近展開，すなわち $1/N$ 展開ができればよい．この問題を解くには，ϕ を対角化する方法，S-D 方程式による方法などいくつもの方法があるが，いずれにしても比較的簡単に解くことができる．その結果から A が大きいときの $n_\chi(A)$ の振る舞いを調べると，

$$n_\chi(A) \sim \alpha^A A^{-b_\chi - 1} \qquad (A \to \infty \text{ のとき}) \tag{4.6}$$

であり，(4.5) の w_χ は κ の関数として有限の収束半径 $\kappa_c = \dfrac{1}{\alpha}$ をもつことがわかる．このことから，κ の値を κ_c より少しだけ小さくしておくと，(4.5) の和で3角形の枚数 A が大きいものが支配的になり，十分に細かい3角分割が実現していることがわかる．この意味で，κ を κ_c に近づけることにより，2次元の力学的単体分割の連続極限が得られる．

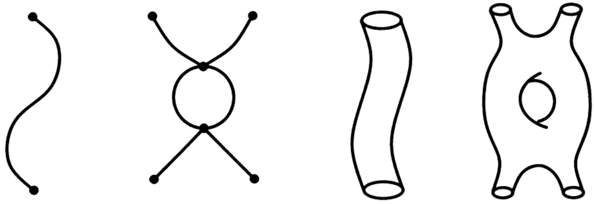
一方，2次元量子重力の連続理論を厳密に解く試みは，ゲージ場との関連で80年代の初め頃から精力的に行なわれていたが，88年以降いろいろな場合に

解が得られるようになった([8] 参照). その結果, 場の異常次元やグリーン関数などが計算できるようになったが, それらはすべて上記の行列模型の結果と一致しており, 力学的単体分割がたしかに正しい連続極限を与えることを示している. さらに行列模型のいろいろな拡張を考えると, 多様体上に物質場ものっている場合も考えられるが, その場合も連続理論の結果と一致していることが確かめられる. また, 3角分割のかわりに4角分割や5角分割を考えても, 同じ連続極限が得られるが, それは重力場の場合にもユニヴァーサリティの概念が成り立つこと, すなわち, 重力場の量子論も, ふつうの場の理論と同様に, 正則化の細かい部分に依存しないという普遍性をもつことを意味している.

このようにして, 少なくとも2次元の時空では, 力学的単体分割が量子重力の正しい構成的定義になっていることが具体的に証明できる. このことは前項で議論したような考え方, すなわち一般座標変換に対する不変性を力学的単体分割によって実現するというアイデアを強く支持しており, 高次元の場合にも力学的単体分割によって量子重力が構成的に定義できる可能性を示唆している. 数値計算の今後の発展がまたれる.

5° 弦理論としての量子重力

第2節2.2項で見たように, 局所場の量子論の摂動展開を考えると, 時空を伝播する多粒子系という描像が得られる. この意味で, 局所場の理論とは点粒子を第2量子化したものと考えられるが, 弦理論では点粒子のかわりに1次元的な拡がりをもったものを考える. 簡単のため, 閉じた弦を考えることにすると, 直観的には, ぷわぷわと振動している太さのない輪ゴムのようなものを考えればよい. そうすると, 点粒子の伝播が時空内での曲線とみなされたのと同様に, 弦の伝播は時空内の曲面になることがわかるだろう(図7). 以下で見るように, このようにして弦の運動を記述することができるが, それ



(a) 点粒子の場合　(b) 弦の場合

図7　時空内での伝播

は局所場の理論の場合の摂動展開に似たものであり，非摂動効果を議論するためにはいくつかの困難を解決しなければならないことに注意しておこう．いまのところ，弦理論は摂動論の範囲内では完全に矛盾のない体系であるといってよい．非摂動効果については未知の点が多いが，この数年の進歩により少しずつ理論が進んできている．

5.1　弦の摂動論

相対論的な点粒子の作用は世界線の長さであったこと（2.13）を思いだすと，相対論的な弦の作用として世界面の面積をとるのが自然である．これは南部・後藤の作用と呼ばれており，

$$S_{\text{南・後}} = \rho \int d^2\xi \sqrt{-\det h} \tag{5.1a}$$

$$h_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \eta_{\mu\nu} \tag{5.1b}$$

と書ける．ここで ξ^a（$a = 0, 1$）は世界面のパラメーターであり，X^μ（$\mu = 0, 1, \cdots, D-1$）は D 次元時空における弦の軌跡を表し，h_{ab} は時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ から世界面に誘導された計量である．また，ρ は弦の張力を表す定数である．点粒子の場合に（2.13）から（2.14）へ移行したのと同様に，（5.1）が次のポリヤコフの作用

$$S_{\rm Poly} = \frac{\rho}{2}\int d^2\xi \sqrt{-g}\, g^{ab} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \eta_{\mu\nu} \tag{5.2}$$

と少なくとも古典論的に等価であることを示すのは簡単である．ここで g_{ab}（$a, b = 0, 1$）は世界面上の計量場であり，X^μ とは独立な変数として導入する．実際，(5.2) を g_{ab} で変分してゼロとおくと，

$$\sqrt{-g}\, g^{ab} = \sqrt{-h}\, h^{ab} \tag{5.3}$$

が得られ，これを (5.2) に代入すると (5.1) が得られるから，この二つは少なくとも古典論的には等価である．

(5.2) は (2.14) と同様に，世界面上の計量場 g_{ab} が D 個のスカラー場 X^μ と相互作用しているような2次元の重力理論の作用とみなすことができる．このように，(5.2) は2次元時空（世界面）における一般座標変換に対する不変性をもつが，さらに次の局所スケール変換

$$g_{ab}(\xi) \longmapsto e^{\sigma(\xi)} g_{ab}(\xi) \tag{5.4}$$

に対しても不変である．ここで $\sigma(\xi)$ は世界面上の任意関数である．実際そうであることは，(5.4) の変換に対して $\sqrt{-g}\, g^{ab}$ が不変であることに気づけばほとんど自明である．しかしながら，弦の量子論を考えると，X^μ と g_{ab} について経路積分を行なう必要があるが，経路積分の測度は一般に局所スケール変換に対して不変ではない．これを局所スケール変換に対する**アノーマリー**と呼んでいるが，時空の次元 D が26のときだけは例外であり，X^μ のもつアノーマリーと g_{ab} のもつアノーマリーが互いに打ち消しあって，量子化したあとも局所スケール不変性が保たれている．このような場合は，世界面上のゲージ不変性として，一般座標変換のほかに局所スケール変換に対する不変性もつけ加えて，ゲージの自由度はたして3ということになり，世界面上の計量 g_{ab} の自由度を相殺している．それゆえ，このような系では世界面上の自由度は本質的に X^μ だけになり，自由に伝播する弦の質量スペクトル等を厳密に知ることができる．

また，弦の多体問題を考え，弦の分裂や合体を相互作用として取り入れる

ためには，種々のトポロジーをもった世界面について散乱振幅をたし合わせてやればよい（図8）．これは点粒子の場合のファインマン・ダイヤグラムのたし上げに相当する．この意味で，ここで考えている定式化は，いわば弦理論の摂動論と呼ぶべきものであり，この枠組で直接非摂動効果を取り扱うのは困難であるが，摂動論の枠内では完全に矛盾のない体系になっている．

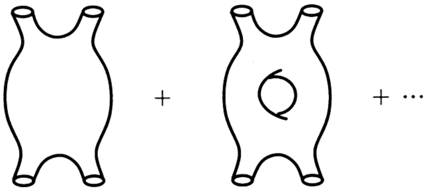


図8　散乱振幅の和
いろいろなトポロジーの面についてたし合わせる．

弦理論の作用（5.2）をもう少し一般化して，世界面上に X^μ 以外の場を導入したり，世界面上の対称性を超重力に拡張したりするなどいろいろな弦理論が構成できるが，そのうちで上の $D=26$ の場合と同様に世界面上で局所スケール不変性をもつものを総称して，**臨界弦**と呼んでいる．臨界弦の著しい特徴は，重力場を自然に包含していることである．すなわち，弦はその振動状態によっていろいろなスピンや質量をもった粒子に対応するが，閉じた臨界弦は必ずスピンが 2 で質量がゼロの粒子に対応する状態を含む．場の理論の一般論から，そのような粒子は重力子でしかあり得ないことがわかるが，実際に弦どうしの相互作用を調べることによってもそれは確認できる．このように臨界弦は重力を自然に含んでいるのみならず，世界面上に種々の場を導入すると，ゲージ場や物質場も自然に出てくることもわかっている．

このほかにも，弦理論は紫外発散をもたないなど種々の著しい性質を備えているが，これらの理論から物理的な予言を行なうためには，非摂動効果を理解することがどうしても必要である．実際，いろいろな時空の次元やゲージ群をもった臨界弦が無数につくれるが，それらはおそらく一つの理論の異

なる摂動論的真空であると思われる．すなわち，弦理論は摂動論的に安定な無数の等価でない真空をもつが，本当の真空はそれらが非摂動効果によって重ね合わされたものである可能性が高い．それゆえ，弦理論の本当の真空が我々の標準模型に近いものであることを示すためには，是非とも弦理論の非摂動的定式化が必要であると思われる．

5.2　弦理論の非摂動効果

弦理論の非摂動効果を記述するためには，局所場のときに第2節2.3項で考えたのと同様のステップをたどればよいと思われる．一つの方向として弦の場の構成的な定義が考えられるが，いまのところ一般の臨界弦に適用できる形にはなっていない．しかしながら，非現実的ではあるが，時空の次元が2以下でしかもディラトン場が空間座標の1次式であるような仮想的な真空（linear dilaton vacuum と呼ばれる）を表すような臨界弦を考えると，それは第4節で述べた行列模型と等価であることがわかっている（[8] 参照）．(4.4) からもわかるとおり，行列模型の $1/N$ 展開の N^{χ} の項に現れる面のオイラー数は χ であるから，$1/N$ 展開はちょうど弦理論の摂動級数に対応している．いいかえると，行列模型 (4.3) の積分を $1/N$ 展開せずに評価すれば，$1/N$ 展開に対する非摂動効果，すなわち弦理論の非摂動効果が得られるのである．その具体的な方法はいくつもあるが，そのうちでも，(4.3) に対する S-D 方程式を使うものは弦の変形に対するグリーン関数の応答という幾何学的な意味をもつので興味深く，弦の非摂動効果を扱う一つの方向を示している（[9] 参照）．このように，行列模型あるいはその S-D 方程式を一般の臨界弦に適用できるように拡張する試みはいまのところ成功していないが，今後も有望なものの一つといえる．

このような構成的な定式化をさがす試みとは少し性格が異なるが，第2節2.3 (c) で述べたようなアプローチもこの2年ほどさかんに行なわれている（[4] 参照）．著しい結果として，弦理論の古典解としてのソリトンの性質が具体的

にわかるようになってきたこと(D-brane と呼ばれる)，弦理論にも強結合・弱結合のデュアリティがあること，さらに，10次元あるいはそれ以下の次元で一見異なる弦理論が，11次元理論（M-theory と呼ばれる）あるいは12次元理論（F-theory）の特別な真空としてあるていど統一的に理解できるようになったことなどがあげられる．これらの結果は，それだけで弦理論の非摂動効果を定式化できるというものではないが，正しい定式化を見つける際の大きな手がかりになると思われる．

6° おわりに

量子重力を記述する可能性として，一応局所場からのアプローチと弦理論からのアプローチに分けて議論したが，必ずしもこれらは独立なものではなくて，理論がうまくできた暁にはどちらともみなせるものになっている可能性もある．たとえば，弦理論を行列模型で定式化したとすれば，おそらくその行列模型はなんらかの局所場の理論である可能性が高いし，11次元の超重力をうまく構成的に定義したものが M-theory である可能性も高い．

いずれにしても，現在の量子重力・弦理論の状況は70年代半ばのゲージ理論の状況に似ている．70年代の初めには，ゲージ理論の摂動論が完全に理解され，その後の10年弱の期間は非摂動効果を理解する時代であった．70年代の中頃は，ソリトン（モノポール）のダイナミクスやインスタントン，デュアリティがさかんに議論され，非摂動効果に対する理論が徐々に深まっていった時期であるが，結局，格子ゲージ理論の中にすべてのからくりが包含されていることがわかり，ゲージ場の非摂動効果の理解が一段落したのであった．こう考えると，D-brane，デュアリティなど現在の弦理論の状況はきわめて当時のゲージ場に似ている．ゲージ場との類推を進めると，近いうちに弦理論の構成的な定義が現れて，我々のサイエンスの歴史が一段落するところにくるのではないかと期待される．

参考文献

[1] A. M. Polyakov, *Gauge fields and strings*, Harwood, 1987.

[2] K. G. Wilson and J. Kogut, The renormalization group and the epsilon expansion, *Physics Reports* **12** (1974), 75.

[3] N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426** (1994), 19.

[4] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B443** (1995), 85.

[5] E. Brezin and S. R. Wadia, *The large N expansion in quantum field theory and statistical physics*, World Scientific, 1993.

[6] H. Kawai and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B336** (1990), 115.

[7] S. Coleman, *Nucl. Phys.* **B310** (1988), 643.

[8] H. Kawai, *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* **26** (1992), 93.

[9] H. Kawai, N. Kawamoto, T. Mogami and Y. Watabiki, *Phys. Lett.* **B306** (1993), 19.

第6話

量子力学における位相

矢吹治一

シュレディンガー（Schrödinger）波動関数の位相が大きな役割を果たすいくつかの問題を解説する．第1節では波動関数の位相の一般的な性質を論ずる．ここで導かれるディラック（Dirac）の磁気単極子は，第2節のベリー（Berry）の位相の議論に（パラメター空間中の磁気単極子として）再び現れる．第3節において，多重連結領域における量子力学を解説する．

1° 波動関数の位相の一般論

1.1 非可積分位相

ある一つのシュレディンガー方程式と，これに対応するある境界条件が与えられているとする．この問題に対する解 ψ を考えよう．この波動関数 ψ は1成分波動関数とする．これを極表示して，

$$\psi(\vec{x},t) = A(\vec{x},t)\exp(i\beta(\vec{x},t)) \tag{1.1}$$

と書こう．ここで，もちろん A と β は実数値関数である．この波動関数 ψ に定数の位相をつけ加えて得られる新しい波動関数 ψ' を考えてみる：

$$\begin{aligned}\beta(\vec{x},t) &\longrightarrow \beta'(\vec{x},t) = \beta(\vec{x},t) + \text{定数},\\ \psi(\vec{x},t) &\longrightarrow \psi'(\vec{x},t) = A(\vec{x},t)\exp(i\beta'(\vec{x},t)).\end{aligned} \tag{1.2}$$

明らかに，ψ' は ψ と同じ波動方程式をみたし，$\psi'(\vec{x},t)$ が表す物理的内容は $\psi(\vec{x},t)$ と同一である．このことから，ある特定の1点 $(\vec{x},t)$ での位相 β の値は物理的意味をもたない，ということになる．一方，β と β' に共通の性質もある．それは，異なる2点におけるこれらの値の差が互いに等しいということ

である．つまり，波動関数の位相が意味をもつとすれば，その異なる2点における値の差のみにあるといえる．

ここで，一つの一般化を試みる［1］．すなわち，波動関数の位相は，任意の2点ではなくて，近傍の2点での値の差のみが確定した値をもつと仮定する．したがって，遠く離れた2点での位相の差は，その2点を結ぶ径路に依存してもよいとする．つまり，閉回路に沿って一周すると，最初と最後で位相の値が異なることもあり得ると仮定するのである．このような性質の位相（非可積分位相）を許すと理論に曖昧さが生じないか，という点について検討しよう．

そこで波動関数 ψ を，確定した位相をもつ部分 ϕ と非可積分の位相 γ の部分に分けて，

$$\psi = \phi \exp(i\gamma) \tag{1.3}$$

と書くことにする．この分離は一意的ではないが，以下の議論に影響しない．仮定により，位相 γ の勾配 $a_\mu(\vec{x}, t) = \partial_\mu \gamma(\vec{x}, t)$ は確定した値をもつ．しかし，可積分性の条件 $\partial_\mu a_\nu = \partial_\nu a_\mu$ （$\mu \neq \nu$）は必ずしも成立しない．

さて，観測にかかる量は一般に

$$\int (\psi_1 O \psi_2) d\vec{x} \tag{1.4}$$

という積分の絶対値である．ここで，O は任意のオブザーバブルであり，ψ_1 と ψ_2 は任意の波動関数である．この積分（1.4）は確定した絶対値をもたねばならない．この積分が計算できるためには，その被積分関数の2点間の位相差は確定した値をもっていなければならない．したがって，任意の波動関数の対 ψ_1 と ψ_2 がどのような閉回路についても（2π の整数倍を除いて）同一の位相差をもつことが必要になる．逆に，これらの位相差が同一（mod 2π）ならば，積分（1.4）において位相部分からの困難は生じない．このことから，任意の閉回路についての位相変化はすべての波動関数について同一（mod 2π）でなければならない，と結論できる．

式（1.3）に対応して，

$$\psi_k = \phi_k \exp(i\gamma_k), \qquad k = 1, 2 \tag{1.5}$$

と書き，$a_{k\mu} = \partial_\mu \gamma_k$ とすると，上の条件は，

$$\oint_C a_{1\mu} dx^\mu - \oint_C a_{2\mu} dx^\mu = 2n\pi, \qquad n = \text{整数} \tag{1.6}$$

となる．

ここで，次の二つの条件を仮定する：

1. 式（1.6）の閉回路 C は連続的に変形して1点に縮小できる．

2. $a_{k\mu}$ はこの閉回路 C の内部で連続である．

このような場合には，閉回路 C を1点に収縮していくと，式（1.6）の左辺は連続的に0に近づく．他方，右辺のほうは整数 n が0でない場合には，このように連続的に0に近づくということは不可能である．したがって，上の二つの条件がみたされているときには，式（1.6）において $n=0$ と結論できる．以下しばらくの間これらの2条件が，すべての波動関数の対と閉回路に対して成立しているとして考察を進める．

ストークス（Stokes）の定理により，式（1.6）において $n=0$ とおくと，

$$\oint_C (a_1 - a_2)_\mu dx^\mu = \int_S (\partial \times (a_1 - a_2))_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = 0 \tag{1.7}$$

となる．ここで，S は閉回路 C を境界とする曲面である．この式がすべての曲面について成立するためには，$\partial\times(a_1-a_2)=0$ でなければならない．したがって，a_1 と a_2 の差はあるスカラー関数の勾配となる．つまり，$(a_1-a_2)_\mu = \partial_\mu f$ であり，結局 $\partial_\mu(\gamma_1-\gamma_2-f)=0$ となる．この式から，$\gamma_1-\gamma_2-f=$ 定数となり，スカラー関数の不定性を非可積分位相 γ の中へ吸収すると，$\gamma_1=\gamma_2$ と選ぶことができる．結局，非可積分の位相 γ はすべての波動関数に共通であるとみなすことができる．このことから，波動関数の重ね合わせの原理も，非可積分位相の存在と矛盾しないことが分かる．

また，非可積分位相 γ がすべての波動関数に共通であるということから，こ

の γ の存在は力学系自身の性質であり，系の個々の状態とは無関係ということになる．いまここで考えているような1粒子系の場合には，位相 γ はこの粒子がおかれているその背景の場と関係しているはずである．

さて，ψ に対するシュレディンガー方程式において運動量 p_μ が ψ に作用するところは，

$$
\begin{aligned}
p_\mu \psi &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi \\
&= \exp(i\gamma)\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \hbar a_\mu\right)\phi
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

である．一方，電磁場と電荷 e の粒子との間の相互作用は，極小相互作用の原理，すなわち $p_\mu \to p_\mu - (e/c)A_\mu$ というおき換えによって与えられる．したがって，ψ が電磁場と相互作用をしないとすると，ϕ は次のような電磁ベクトル・ポテンシャルと相互作用するものとみなせる：$A_\mu = (\hbar c/e)a_\mu$．このおき換えを通じて，a_μ は次のように電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ に対応する：$\vec{\partial} \times \vec{A} = \vec{B}$，$-\vec{\partial}A_0 - \partial_0 \vec{A} = \vec{E}$．3次元空間ベクトルを $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$ などと書く．ただし，微分演算子だけは例外で，$\vec{\partial} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ とする．

あるいは逆に次のように述べることもできる：電磁ベクトル・ポテンシャル A_μ と相互作用する波動関数 ϕ を求めるという問題があるとする．このとき，上記のようなおき換えを通じて計算できる位相 γ を波動関数 ϕ につけ加えて，新しい波動関数 $\psi = \exp(i\gamma)\phi$ を導入する．この波動関数 ψ は電磁ポテンシャルがない場合の問題の解である．すなわち，シュレディンガー波動関数に対する電磁場の効果は非可積分位相を通じて現れる．

以上の議論において二つの条件を仮定した．条件 **1** については第3節で論ずることとし，条件 **2** をこれから検討しよう．

1.2　ディラックの磁気単極子

この項では，次のようなクラスの波動関数を考察する（条件 **1** は仮定しておく）．すなわち，波動関数 ϕ がある範囲の $(\vec{x}, t)$ に対して $\phi=0$ となる場合である．このような場合，$\phi=0$ となる場所では位相が定義できないので，上の条件 **2** は成立するとは限らない．時刻 t が固定されているとすると，$\phi=0$ は一般には3次元空間内の1次元曲線に対応する．したがって，以下では $\phi=0$ となるような $(\vec{x}, t)$ の集合を節線と呼ぶことにする．

波動関数 ϕ の位相 δ が，1本の節線の周りの十分に小さい閉回路に沿って一周する間に変化する量は，

$$\oint \vec{\partial}\delta\cdot d\vec{x} = 2\pi n, \qquad n = \text{整数} \tag{1.9}$$

となる．ここでは，ϕ の一価性を仮定した．上式の n という量は，この節線に特徴的な量であり（これを指数と呼ぶ），その符号はこの節線とそれを囲む閉曲線の相対的な位置関係で決まる．

さてここで，もとの波動関数 ψ の位相 $\delta+\gamma$ がある有限の大きさの閉曲線 C に沿って一周するときどれだけ変化するかを見てみよう．このような閉回路 C は多数（k 個としよう）の小さな閉回路 C_j の合併とみなすことができる．そして，小さな閉回路 C_j はそれぞれ多くて1本の節線を囲んでいるとする．それぞれの小閉回路 C_j が囲む節線の指数を n_j とする．C_j が節線を含まないとき $n_j=0$ とする．閉回路 C を境界とする曲面を S とする．このような場合，位相 $\delta+\gamma$ の変化量は次のように計算できる：

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{\partial}(\delta+\gamma)\cdot d\vec{x} &= \sum_{j=1}^{k}\oint_{C_j}\vec{\partial}\delta\cdot d\vec{x} - \oint_C \vec{a}\cdot d\vec{x}\\ &= \sum_{j=1}^{k} 2\pi n_j - \int_S (\vec{\partial}\times\vec{a})\cdot d\vec{S}\\ &= \sum_{j=1}^{k} 2\pi n_j - \frac{e}{\hbar c}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\\ &= 2\pi N - \frac{e}{\hbar c}\Phi.\end{aligned} \tag{1.10}$$

上式において，指数 n_j の総和を N と書き，曲面 S を突き抜ける全磁束を Φ とした．

さてここで，曲面 S を閉曲面とすると，これは閉曲線 C を1点に収縮させた場合に対応し，上式左辺の位相変化はゼロである．つまり，

$$2\pi N - \frac{e}{\hbar c}\Phi = 0 \tag{1.11}$$

となる．ここで，Φ は閉曲面 S を貫く全磁束であり，N は S についての指数の総和である．この N に対する寄与は S 内部に端点をもつ節線からくる．全磁束 Φ は問題の粒子にとって外的な磁場によるものであるから，N は系のすべての波動関数に対して共通のものである．つまり，節線の端点は磁場の源に対応していることになる．

そこで，この状況の最も簡単な例として，磁荷 g をもつ磁気単極子が座標原点に存在する場合，つまり $\vec{E}=0$，$\vec{B}=g\vec{x}/x^3$，$(x=|\vec{x}|)$ という場合を考えると，式（1.11）は

$$eg = \frac{\hbar c N}{2} \tag{1.12}$$

となる．この式はディラックが1931年に導いた電荷の量子化の式である．

条件（1.12）から電荷の量子化が導かれる状況を見るには次のようにすればよい．K 個の異なる電荷 e_i と L 個の異なる磁荷 g_j があるとする．このとき条件式（1.12）は $e_i g_j = n_{ij}/2$，$i=1,\cdots,K$，$j=1,\cdots,L$ となる（$\hbar=c=1$ とする）．この代数方程式系を調べてみると，すべての電荷 e_i がある量 e_0 の整数倍でなければならない，ということが判明する．

なお，磁気単極子が存在する場合には，ベクトル・ポテンシャルが大域的には定義できない．この状況をきちんと取り扱うために通常は，ファイバー束の理論を採用する［2］．磁気単極子に関しては，たとえば文献［3］が参考になるだろう．

2° ベリーの位相

ハミルトニアン H が時刻 t とともにゆっくりと変化し，ある時間 T の後に再び出発時と同一のものに戻る場合を考える．ゆっくり変化するというのは，断熱定理が適用できるほどにゆっくり，ということである．また，ハミルトニアンの時間依存性は，あるパラメター $\vec{R}(t)$ を通じて現れるとする．$\vec{R}(t)$ は一般には n 次元ベクトルで，ここでは $n \geq 2$ とする．たとえば，$\vec{R}(t)$ は時間的に変化する外部磁場 $\vec{B}$ とかあるいは，3次元調和振動子のバネ定数とかである．パラメター $\vec{R}(t)$ の次元を2以上としたので，時間 T の間に $\vec{R}(t)$ がパラメター空間中でループ C を描いて元へ戻る状況を考えることができる．

以下しばらく，考察の対象とする波動関数，ハミルトニアン H 等においては時間依存性のみを明示して，他は書くことを省略する．さらに，ハミルトニアン $H(\vec{R}(t))$ は断熱定理が成立するための諸条件をすべてみたしていると仮定する．特に，ハミルトニアン $H(\vec{R}(t))$ の固有値 $E_m(t)$ は離散的であり，出発時刻 $t=0$ において我々の波動関数は，その固有状態の一つ，つまり

$$|\psi(t=0)\rangle = |m(\vec{R}(0))\rangle \tag{2.1}$$

であるとする．ここで，m は固有値のラベルである．記号 $|\,\rangle$ はディラックのケット・ベクトルを表す．この記法では，波動関数 ψ は $|\psi\rangle$ に対応し，ψ^* はブラ・ベクトル $\langle\psi|$ に対応する．波動関数 ψ と φ の内積を $\langle\psi|\varphi\rangle$ と書く．

出発後のある時刻 t での波動関数は一般的には，

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|n(t)\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n'(t')\,dt'\right) \tag{2.2}$$

という形である．ここで次のような記号を導入した：

$$E_n'(t) = E_n(t) - \hbar\eta_n(t), \qquad \eta_n(t) = i\langle n(t)\,|\,\dot{n}(t)\rangle. \tag{2.3}$$

これに断熱定理の結論 $c_n(t) = \delta_{nm} + O(1/T)$ を考慮すると，

$$|\psi(t)\rangle = |m(\vec{R}(t))\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_m(t')\,dt'\right)\exp\left(i\gamma_m(t)\right) \tag{2.4}$$

である．ここで，オーダー $O(1/T)$ の項は無視した．また，上式第2の指数因子は，

$$\gamma_m(t) = \int_0^t \eta_m(t')dt'$$
$$= i\int_0^t \langle m(\vec{R}(t'))\,|\,\dot{m}(\vec{R}(t'))\rangle\, dt' \tag{2.5}$$

と定義した．時間 T の後にパラメーター $\vec{R}$ が出発時の値に戻る状況を調べたいので，固有状態 $|m(\vec{R})\rangle$ は $\vec{R}$ について一価になっていると仮定する．

さてここで，

$$\gamma_m(T) = i\int_0^T \langle m(\vec{R}(t))\,|\,\dot{m}(\vec{R}(t))\rangle\, dt \tag{2.6}$$

は実数であることに注意しておこう．積分変数を t から $\vec{R}$ へ変換すると，

$$\gamma_m(T) = i\int_0^T \langle m(\vec{R}(t))\,|\,\vec{\partial}_R m(\vec{R}(t))\rangle\cdot\dot{\vec{R}}(t)\,dt$$
$$= i\oint_C \langle m(\vec{R})\,|\,\vec{\partial}_R m(\vec{R})\rangle\cdot d\vec{R} \tag{2.7}$$
$$\equiv \gamma_m(C) \tag{2.8}$$

となる．式 (2.7) の $\vec{R}$ の積分はループ C について行なう．さらに，上式の値は時間 T というよりもループ C に依存するので，第3行目でこの量を $\gamma_m(C)$ と書くことにした．

ここで，ストークスの定理を使うと，

$$\gamma_m(C) = -\,\mathrm{Im}\oint_C \langle m(\vec{R})\,|\,\vec{\partial} m(\vec{R})\rangle\cdot d\vec{R} \tag{2.9}$$
$$= -\,\mathrm{Im}\int_S (\vec{\partial}\times\langle m(\vec{R})\,|\,\vec{\partial} m(\vec{R})\rangle)\cdot d\vec{S} \tag{2.10}$$

となる．上式では，$\langle m(\vec{R})\,|\,\vec{\partial} m(\vec{R})\rangle$ が純虚数であることに注意し，ベクトルの外積を記号 × で表した．面積分はループ C を境界とするパラメーター空間内の曲面 S について行なう．ここで勾配の回転はゼロという事実を用いると，

$$\gamma_m(C) = -\operatorname{Im}\int_S (\langle \vec{\partial} m(\vec{R})| \times |\vec{\partial} m(\vec{R})\rangle)\cdot d\vec{S} \tag{2.11}$$

という表式が得られる．

式 (2.11) の二つの状態ベクトルの間に完全性関係式 $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ を挿入する．そして，$\langle m|\vec{\partial} m\rangle$ が純虚数なので，n が m の部分は (2.11) に寄与しない，ということに注意すると，

$$\gamma_m(C) = -\operatorname{Im}\int_S \sum_{n\neq m} (\langle \vec{\partial} m(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle \times \langle n(\vec{R})|\vec{\partial} m(\vec{R})\rangle)\cdot d\vec{S} \tag{2.12}$$

となる．さて，次式が成立することは少し計算すれば分かる：

$$\langle n(\vec{R})|\vec{\partial} m(\vec{R})\rangle = \frac{\langle n(\vec{R})|\vec{\partial} H|m(\vec{R})\rangle}{-(E_n - E_m)}. \tag{2.13}$$

ここで，E_n 等の $\vec{R}$ に対する依存性を表示するのを省略した．(2.13) を (2.12) へ代入すると，次の式が結論できる：

$$\gamma_m(C) = -\int_S \vec{V}_m\cdot d\vec{S}, \tag{2.14}$$

$$\vec{V}_m(\vec{R}) = \operatorname{Im}\sum_{n\neq m}\frac{\langle m(\vec{R})|\vec{\partial} H|n(\vec{R})\rangle \times \langle n(\vec{R})|\vec{\partial} H|m(\vec{R})\rangle}{(E_n - E_m)^2}. \tag{2.15}$$

以上の種々の表現［線積分 (2.9)，面積分 (2.10)，(2.14)］をもつ $\gamma_m(C)$ がベリーの位相と呼ばれているものであり，一般にはゼロとは限らない量である．この位相に対する上記のような最終的な定式化は，1983年にベリーによって与えられたものである [4]．

注意1　式 (2.4) からは一見，$\gamma_m(C)$ の値が固有ベクトル $|m(\vec{R})\rangle$ の位相の不定性に影響されるように見える．しかし実際には，表式 (2.15) がそうでないことを示している．$\langle m(\vec{R})|$ と $|m(\vec{R})\rangle$ とで位相が打ち消し合うからである．あるいは，(2.10) から，$|m(\vec{R})\rangle$ の位相を変化させることによって新たに生ずる項は勾配の回転となってゼロになる，ということからも分かる．

注意2　式 (2.15) で定義したベクトル $\vec{V}_m(\vec{R})$ は $\vec{\partial}\cdot\vec{V}_m(\vec{R}) = 0$ をみたす．これは，(2.15) から直接計算して示すことができる（やや計算は長くなるが）．しかしもっと簡単に，(2.10) から，回転の発散はゼロという一般的性質によ

りただちに分かる．$\vec{V}_m(\vec{R})$ の発散がゼロということから，閉曲線 C を境界とする曲面 S のとり方の任意性が $\gamma_m(C)$ の値に影響を与えないことが分かる．

注意3　ベクトル・ポテンシャルを

$$\vec{A}(\vec{R}) = i\langle m(\vec{R})\,|\,\vec{\partial} m(\vec{R})\rangle \tag{2.16}$$

と定義する．そうすると式 (2.8) は，$\gamma_m(C)$ が $\vec{A}$ の曲線 C に沿う線積分で，これが磁場 $\vec{B}=\vec{\partial}\times\vec{A}$ の面積分 (2.10) としても表し得る，ということ示している．なお，状態の位相を

$$|m(\vec{R})\rangle \longrightarrow |m(\vec{R})\rangle' = |m(\vec{R})\rangle \exp(i\theta(\vec{R})) \tag{2.17}$$

と変換することは，$\vec{A}(\vec{R})$ のゲージ変換に対応する：

$$\vec{A}(\vec{R}) \longrightarrow \vec{A}(\vec{R})' = \vec{A}(\vec{R}) - \vec{\partial}\theta(\vec{R}). \tag{2.18}$$

注意4　固有ベクトル $|m(\vec{R})\rangle$ の時間 t に対する依存性は，パラメター $\vec{R}$ を通じて生ずるのみである．ハミルトニアン H の時間依存性が $\vec{R}$ に起因するとしたからである．上記において，$t=0$ から $t=T$ にかけて $\vec{R}$ がパラメター空間中のループ C に沿って一周するプロセスを考察した：$\vec{R}(T)=\vec{R}(0)$．また，$|m(\vec{R}(t))\rangle$ は $\vec{R}$ に関して一価と仮定したので，$|m(\vec{R}(T))\rangle = |m(\vec{R}(0))\rangle$ となっている．

さて，波動関数 $|\psi(t)\rangle$ から自明な時間依存の位相部分［式 (2.4) の右辺の 1 番目の指数因子］を取り去った残りを

$$|\phi(\vec{R}(t))\rangle = |m(\vec{R}(t))\rangle \exp(i\gamma_m(t)) \tag{2.19}$$

と定義しよう．エネルギー $E_m(\vec{R}(t))$ がつねにゼロとなっている場合には，この $|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ は $|\psi(t)\rangle$ と同一のもので，シュレディンガー方程式の（近似的）解である．そうすると，

$$\begin{aligned}|\phi(\vec{R}(T))\rangle &= |m(\vec{R}(T))\rangle \exp(i\gamma_m(C))\\ &= |m(\vec{R}(0))\rangle \exp(i\gamma_m(C))\end{aligned} \tag{2.20}$$

であるから，$|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ は一般には一価ではなく，ベリーの（非可積分）位相 γ_m を伴うことになる．この非一価性の可能性がある $|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ を特徴づける式は，

$$\langle\phi(\vec{R}(t))\,|\,\dot{\phi}(\vec{R}(t))\rangle = 0 \tag{2.21}$$

である．

さてここで，次のようなファイバー束 (E, π, F, G, M) を考えよう．底空間

M はパラメター $\vec{R}$ の空間である．ファイバー F は，自明な時間発展因子を取り除いた波動関数 $|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ の空間である．構造群 G は $U(1)$ で，$|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ の位相を変化させる作用をする．つまり，$\exp(i\theta)$（$\theta=$ 実数）を $|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ に乗算する作用を行なう．E はファイバー束の全空間であり，局所的には M と F の直積空間となっている．π は E から M への射影である．

このファイバー束の中での平行移動は，条件（2.21）をみたすようなものであると定義する．つまり，$|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ からの変化 $|\dot{\phi}(\vec{R}(t))\rangle$ はもとの $|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ と直交する方向に向かうものとする．このファイバー束の接続は（2.16）のベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{R})$ となる．ループ C に沿った平行移動の計算結果は，$|\phi(\vec{R}(t))\rangle$ で表すと式（2.20）である．したがって，ベリーの位相はこのファイバー束のホロノミー群に対応している．すなわち，$\exp(i\gamma_m(C))\in G$ がホロノミー群の要素である［5］．

注意 5　ハミルトニアン $H(\vec{R})=\vec{\sigma}\cdot\vec{R}$ に対しては，簡単にベリーの位相が計算できる．ここで，$\vec{\sigma}=(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ はパウリ（Pauli）のスピン行列である．たとえば固有ベクトル $|1\rangle$，$(H|1\rangle=|\vec{R}|\cdot|1\rangle)$，については，$\gamma_1(C)=-\Omega(C)/2$ となる．ここで，$\Omega(C)$ は $\vec{R}$ 空間の原点から曲面 S を見る立体角である．この場合について，式（2.16）からベクトル・ポテンシャルを計算すると，これがパラメター $\vec{R}$ の空間の原点に磁荷 $-1/2$ の磁気単極子が存在する場合のポテンシャルになっていることが分かる．非自明なベリーの位相の存在はパラメター空間中の磁気単極子の存在に対応する．

ベリーの位相の観測実験は数多く存在する．これらについてはたとえば参考文献［6］の第4章を参照するとよいだろう（この論文集には初期の代表的な論文が40編あまり収録されている）．なお，ベリーの位相に関する紹介記事として［7］があり，また，ベリー自身による専門家向けでない記事として［8］がある．日本語での専門的な総合報告としては［9］がある．

3° 多重連結領域での量子力学

この節ではファインマン（Feynman）の径路積分［10］の方法を用いて，第1節の条件**1**がみたされない場合，つまり多重連結領域の場合を考察する．径路積分についての参考書としては［11］がある．以下では，まず始めにトーラス上の自由粒子について考察し，次にアハラノフ-ボーム（Aharonov-Bohm）効果について論ずる．

3.1　トーラス上の自由粒子

トーラス上の自由粒子のラグランジアンを

$$L = \frac{A}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{B}{2}\dot{\phi}^2 \tag{3.1}$$

とする．ここで，角度の変数 θ と ϕ は，図1で定義したものである．この図の正方形 $OABC$ において，OA と CB を同一視し，また同時に OC と AB を同一視して，3次元空間中のトーラスを作るものとする．物理的な座標の範囲は

$$0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \phi < 2\pi \tag{3.2}$$

とする．

ラグランジアン（3.1）に対する2次元 θ-ϕ 平面上のファインマンの積分核は，

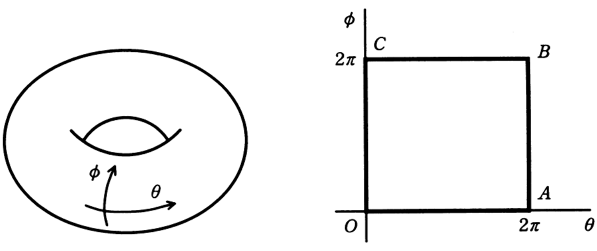


図1　トーラス上の座標を θ と ϕ で指定する．

$$K(\theta, \phi, t; \theta_0, \phi_0, t_0) = \frac{\sqrt{AB}}{2\pi i\hbar(t-t_0)} \exp\left(i\frac{A(\theta-\theta_0)^2 + B(\phi-\phi_0)^2}{2\hbar(t-t_0)}\right) \tag{3.3}$$

である．この表式は，時間・空間に格子を導入して粒子の径路を折れ線で近似するというファインマンの通常の方法で計算できる．

さて次に，問題のトーラス（図1）に対する波動関数を考えよう．そのために，まずこの場合に対応するファインマンの積分核 $K_T(\theta, \phi, t; \theta_0, \phi_0, t_0)$ を計算する．この積分核 K_T は，時刻 t_0 に点 $P_0(\theta_0, \phi_0)$ から出発し，時刻 t に点 $P(\theta, \phi)$ に達するトーラス上のすべての径路に対して，上の表式（3.3）の K の和を計算すれば求まる．いまの場合，もちろん（θ_0, ϕ_0）も（θ, ϕ）もともに条件（3.2）をみたさねばならない．

トーラス上で点 P_0 から点 P へ行く径路は，θ および ϕ 方向に何回転するか

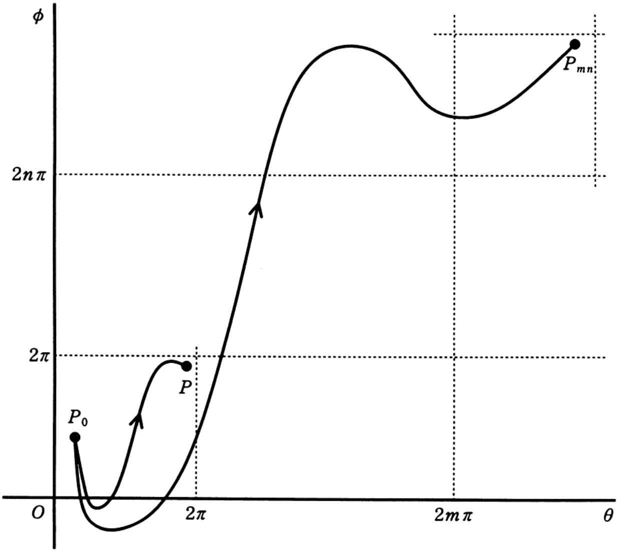


図2　点 P_0 から点 P へ行く径路

によって分類できる．この状況は図２のように θ-ϕ 平面全体で考えたほうが見通しがよくなる．この図で，点 P に対応する点 P_{mn} は座標（$\theta+2m\pi$, $\phi+2n\pi$）をもつ．点 P_{mn} は，点 $P(\theta,\phi)$ からさらにトーラス上で θ 方向に m 回転，ϕ 方向に n 回転して到達する点を表している．図２の θ-ϕ 平面上で，正方形の区間 $[2m\pi, 2(m+1)\pi)\times[2n\pi, 2(n+1)\pi)$ を考えると，これらの各区間中にそれぞれ１点ずつ P の対応点が存在する．点 P_{mn}（$m=0,\pm1,\pm2,\cdots;\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）はすべて物理的には点 P と同一のものである．したがって，K_T に寄与する径路の集合は，θ-ϕ 平面上で考えると，点 P_0 から点 P_{mn}（$m=0,\pm1,\pm2,\cdots;\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）へ到る径路の集合ということになる．特に，点 P_0 からある一つの点 P_{mn} へ達する径路全体からの K_T への寄与は，式（3.3）により，

$$K_{m,n} = \frac{\sqrt{AB}}{2\pi i\hbar(t-t_0)}\exp\left(\frac{i}{2\hbar(t-t_0)}\left(A(\theta+2m\pi-\theta_0)^2+B(\phi+2n\pi-\phi_0)^2\right)\right) \tag{3.4}$$

である．したがって，

$$K_T = \sum_{m,n} K_{m,n} \tag{3.5}$$

となる．

さて，$K_{m,n}$ はそれ自身でシュレディンガー方程式をみたす．この事実は径路積分の一般的議論からも分かるが，直接計算しても確かめられる．このことから，$K_T=\sum_{m,n} c_{m,n}K_{m,n}$ という具合に，各 $K_{m,n}$ に定数係数 $c_{m,n}$ の比重をつけて和をとってもよさそうに思える．しかし次のように考えると，すべての m,n について $c_{m,n}$ は互いに等しい，つまり $c_{m,n}$ は定数ということが結論できる．

まず，K_T の引数の θ を増加させ，トーラス上で一周させる（ϕ は固定しておく）とき，K_T の値がどう変化するかを考えてみよう．K_T は一価関数であると仮定する．このとき，$\theta\to\theta+2\pi$ とすると K_T の値はもとへ戻るはずである．一方，$K_{m,n}$ の値の変化を追っていくと，どうだろうか．$K_{m,n}$ は θ-ϕ 平面上

での径路積分で求まった関数である．したがって，θ-ϕ 平面上では，θ は $\theta+2\pi$ と変化し，$P_{m,n}$ は $P_{m+1,n}$ へ移動している．それゆえ，$K_{m,n}$ の値 $K_{m,n}(\theta,\phi)$ は $K_{m,n}(\theta+2\pi,\phi)=K_{m+1,n}(\theta,\phi)$ に変化する．つまり，

$$K_T(\theta,\phi) \longrightarrow K_T(\theta,\phi)=\sum_{m,n} c_{m,n}K_{m+1,n}(\theta,\phi)=\sum_{m,n} c_{m-1,n}K_{m,n}(\theta,\phi) \tag{3.6}$$

である．各々の $K_{m,n}$ は互いに独立な関数であるので，$c_{m,n}$ はすべての m について互いに等しくなければならない．同様の議論を ϕ について行なうと，結局すべての $c_{m,n}$ が互いに等しくなる．したがって，K_T は式（3.5）をみたすということになる．

3.2　アハラノフ-ボーム効果

アハラノフ-ボーム効果（AB 効果）は，図3のような実験において生ずる．荷電粒子が源 A から出発して，スクリーン上の点 C に達する．このとき，二つのスリット U と D の間には遮蔽された磁場 B が紙面に垂直方向に存在するとする．B は時間的に一定で，その全磁束を Φ とする．この磁場 B は荷電粒

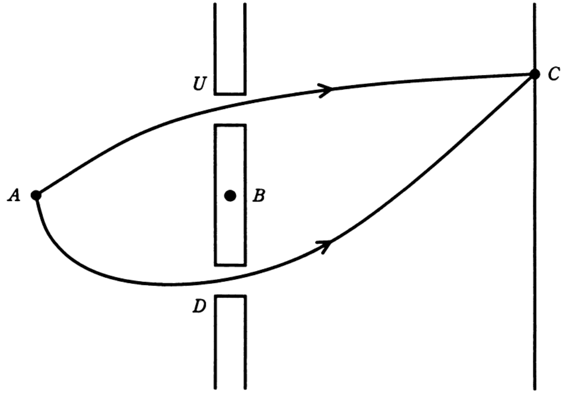


図3　アハラノフ-ボーム効果の実験配置（A は荷電粒子の源．U と D はスリット．B は遮蔽された磁場．C はスクリーン上の点．）

子が到達し得る場所では，完全にゼロになっているとする．しかし一方，ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ は，荷電粒子が存在し得るところで，一般にはゼロにならない．なぜならば，

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{x} = \int_S (\vec{\partial}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi \tag{3.7}$$

であり，C はたとえば径路 $ADCUA$ である．

古典的常識に従えば，荷電粒子に対する電磁気の作用は電場と磁場によって生ずる．ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ は理論上の便宜的構成物にすぎない．したがって，図3のような実験においては，荷電粒子は電場および磁場がゼロのところを通過するわけだから，点 C での荷電粒子密度は Φ と無関係のはずである．しかし，実験結果［12］はこの見解を否定している．AB 効果の総合報告としては［13］がある．

そこで，この様子を見るために点 C での波動関数の値 $\psi(\vec{x}, t)$ を計算しよう．まず，ファインマンの積分核 K_{AB} を求めることにする．電磁場と相互作用する電荷 e の荷電粒子のラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}})^2 + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}} - eV \tag{3.8}$$

である．3次元座標 $\vec{x}$ に共役な運動量は

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\\ &= m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A}\end{aligned} \tag{3.9}$$

であり，ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}H &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L\\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + eV\end{aligned} \tag{3.10}$$

である．AB 効果の場合は，スカラー・ポテンシャル V はゼロである．ラグランジアン（3.8）から径路 $\tilde{x}$ に対する作用積分 $S[\tilde{x}]$ は，

$$S[\tilde{x}] = S_0[\tilde{x}] + \frac{e}{c}\int_{\tilde{x}} \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} \tag{3.11}$$

という形になる．右辺第2項の積分は，径路 $\tilde{x}$ に沿う線積分である．第1項の S_0 は自由粒子の作用である．したがって，ファインマンの積分核は

$$K_{AB} = \int D\tilde{x} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0[\tilde{x}]\right) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_{\tilde{x}} \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}\right) \tag{3.12}$$

と表現される．径路積分は $D\tilde{x}$ というように，大文字の D で記すことにする．

さて，図3で点 A から点 C へいく径路は，B の周りをまわる回数 n ($n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) によって類別できる．連続的な変形によって互いに移り変わり得る径路全体の集合はホモトピー類と呼ばれている．ここでは，径路 AUC を基準径路として選ぶことにする．この径路を $\bar{x}$ と名づける．径路 $\bar{x}$ から連続的に変形して得られる径路はすべて一つの類に入る．この類を $n = 0$ の類とする．そうすると，径路 ADC は径路 AUC プラス径路 $CUADC$ を連続的に変形して得ることができる．したがって，径路 ADC は $n = +1$ の類に入る（反時計回りを正の方向とする）．ホモトピー類 n に属する径路全体からの積分核 K_{AB} への寄与を K_n と書くことにする．積分核 K_{AB} の一価性を仮定すると，前項と同様の議論によって

$$K_{AB} = \sum_n K_n \tag{3.13}$$

となる．

次に，基準径路 $\bar{x}$ について，

$$\int_{\bar{x}} \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = F \tag{3.14}$$

と定義しよう．そうすると，ホモトピー類 n に属するどの一つの径路についても，

$$\int_{\text{類 } n \text{ の一つの径路}} \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = F + n\Phi \tag{3.15}$$

となることが分かる．Φ は式（3.7）で定義されている．したがって，ホモトピー類 n に属する径路全体からの（3.12）に対する寄与 K_n は

$$K_n = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}(F+n\Phi)\right)\cdot\int_{\text{類 }n\text{ の径路}} D\tilde{x}\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_0[\tilde{x}]\right) \qquad (3.16)$$

となる．上式右辺の自由粒子に対する径路積分を K_n^0 と呼ぶことにする：

$$K_n^0 = \int_{\text{類 }n\text{ の径路}} D\tilde{x}\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_0[\tilde{x}]\right). \qquad (3.17)$$

そうすると，(3.16) と (3.17) から

$$K_n(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}(F+n\Phi)\right)\cdot K_n^0(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) \qquad (3.18)$$

である．ここで，いままで省略していた引数を明示した．$\vec{x}_0$ は点 A の座標であり，$\vec{x}$ は点 C の座標である．t_0 と t はそれぞれ，出発時刻と到着時刻である．

さて，(3.18) を (3.13) に代入した結果が座標 $\vec{x}$ について一価関数であることは，前項3.1と同様にして確かめられる．このとき，磁場の周りを1回転すると $F \to F+\Phi$ および $K_n^0 \to K_{n+1}^0$ となることに注意すればよい．

ベクトル・ポテンシャルがゼロの場合のファインマンの積分核 K_n^0 は，ヤング (Young) の二重スリット実験の場合の積分核である．自由粒子の作用 $S_0[\tilde{x}]$ は，径路 $\tilde{x}$ が古典力学の運動方程式をみたすとき極値（いまの場合最小値）をとる．径路 $\tilde{x}$ が古典論の径路から外れれば外れるほど $S_0[\tilde{x}]$ の値は大きくなり，K_n^0 への寄与は（指数の急激な振動のため）小さくなる．したがって，主要な寄与は K_0^0 と K_1^0 である．特に，時刻 t_0 に荷電粒子が点 $A(\vec{x}_0)$ から出発するとした場合，スクリーン上での波動関数の値 $\psi(\vec{x}, t)$ を考えてみよう．このとき，波動関数は非常によい近似で，$\psi(\vec{x}, t) \propto K_0^0 + K_1^0$ となる．

同様にして，アハラノフ-ボーム効果の場合にはスクリーン上で波動関数は，

$$\psi(\vec{x}, t) \propto \exp\left(\frac{ieF}{\hbar c}\right)\cdot K_0^0 + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}(F+\Phi)\right)\cdot K_1^0 \qquad (3.19)$$

となり，$|\psi|^2$ が磁束 Φ によって変化する干渉パターンを与える．

波動関数に対する (3.13) と (3.18) の構造を最初に論じたのは Schulman [14] と Berry [15] である．また，K_{-1}^0 と K_2^0 が，主要項に対する補正項として，Schulman，Berry とは別の観点から，[16] で調べられている．

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A 133** (1931), 60.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, 1969, John Wiley & Sons ;
N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, 1951, Princeton Univ. Press ;
T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hansen, *Phys. Reports* **66** (1980), 213.

[3] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **D 12** (1975), 3845 ;
S. Coleman, *The Magnetic Monopoles Fifty Years Later*, in Proceedings of the International School of Subnuclear Physics, ed A. Zichichi, 1983, Plenum Press.

[4] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 392** (1984), 45.

[5] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983), 2167.

[6] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, 1989, World Scientific.

[7] 倉辻比呂志，パリティ **3** (1988), 26；日本物理学会誌 **47** (1992), 447；
青木秀夫，数理科学 **341** (1991), 11.

[8] M. Berry, *Physics Today* 11月号 (1990).

[9] 細野 忍，素粒子論研究 **75** (1987), 37；
谷村省吾，素粒子論研究 **85** (1992), 1.

[10] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), 367.

[11] 崎田文二・吉川圭二，径路積分による多自由度の量子力学，1986，岩波書店；
R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, 1965, McGraw-Hill ;
L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, 1981, John Wiley and Sons.

[12] A. Tonomura et al., in *Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, (pp.20－28), [Proceedings of the International Symposium : Foundations of Quantum Mechanics, 1983], eds. S. Kamefuchi et al., 1984, 日本物理学会.

[13] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Lecture Notes in Physics no. 340, 1989, Springer.

[14] L. S. Schulman, *J. Math. Phys.* **12** (1971), 304.

[15] M. V. Berry, *Eur. J. Phys.* **1** (1980), 240.

[16] H. Yabuki, *Int. J. Theor. Phys.* **25** (1986), 159.

ゲージ理論における正準交換関係の表現とアハラノフ-ボーム効果

新井朝雄

1° 序　論

正準交換関係は量子力学における基本関係式のひとつである．もうひとつの主題，**アハラノフ-ボーム**（Aharonov-Bohm）**効果**（AB効果と略す）は，図1に示すように，電子線の流れが，磁場の存在する領域の外側の空間を通るとき，それが空間的には磁場と相互作用をしないにもかかわらず，磁場を変動させるとこれに応じて電子線の回折・干渉パターンが変化する現象をさす．古典物理学的には不可解なこの現象は，1959年，アハラノフとボームによって，量子力学を用いて，理論的に予言された［1］．他方，AB効果の決定的な実験的検証がなされたのは比較的最近のことであった[1]．

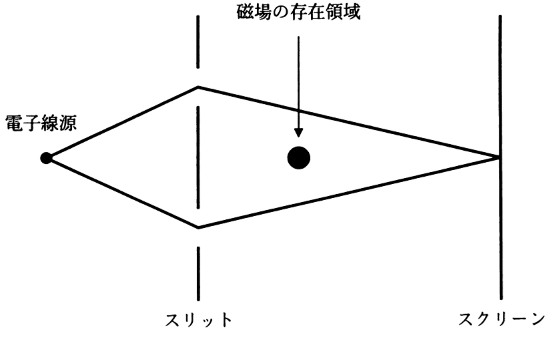


図1　AB効果の模式図

1）［30］の6，7章，［40, 41］を参照.

量子力学においては，物質と電磁場の相互作用を第一義的に決めるのは，電磁場そのものではなく，それを導く電磁ポテンシャルである．この理論形式は，ゲージ理論とよばれる，もっと普遍的な形式の特別な場合であることが示される．AB 効果の実験的検証は，ゲージ理論が物理的現実性をもつことに対するひとつの支持をあたえる[2]．

AB 効果の理論的説明は，これまで，さまざまなレヴェルでなされてきた．だが，これらの多くの議論は数学的にあいまいであり，厳密さと明晰さに欠ける．この小論では，正準交換関係と AB 効果が結びついていること，そして，この観点から，AB 効果が数学的に厳密かつ明晰な形でとらえられることを解説したい．正準交換関係という純粋に数学的な理念と AB 効果という，自然の深い叡智を感じさせる現象との美しい照応が見られる．本論にはいる前に，まず，この研究の背景と動機について簡単に述べておこう[3]．

1.1　量子力学と正準交換関係

よく知られているように，量子力学は，歴史的には，見かけが異なる二つの形式をとって登場した．すなわち，ハイゼンベルク（W. Heisenberg）——およびボルン（M. Born）-ハイゼンベルク-ヨルダン（P. Jordan）——による“行列力学”（1925）とシュレーディンガー（E. Schrödinger）による波動力学（1926）である[4]．前者は，無限行列を用いる代数的な形式であり，後者は今日シュレーディンガーの名でよばれる偏微分方程式による解析的な形式であった．こうした外見上の相違にもかかわらず，それぞれの理論があたえる結果は一致した．この神秘的な一致の謎は，ディラック（P. A. M. Dirac）とヨルダンの変換理論によって両理論が形式的には同等であることが示されるにおよんで，一応，解明された．だが，変換理論は発見法的であり，数学的に厳密な観点からはいろいろと問題があり，満足のゆくものではなかった．量子力学の数学的に厳密な基礎づけを最初に行ない，より高次の観点から，シュレーディンガーの理論とハイゼンベルクの理論の同等性を証明したのは

フォン・ノイマン（J. von Neumann）であった（1927～1932）[28, 29]. 彼は，抽象ヒルベルト空間論と自己共役演算子のスペクトル理論を普遍的な形で展開し，これらの理論を用いて，量子力学を公理論的に構成した．フォン・ノイマンは，シュレーディンガーの理論とハイゼンベルクの理論の外見上の相違は，数学的にはなんら本質的な事がらに属するものではなく，ある代数関係式を表現するヒルベルト空間の選び方の違いにすぎないことを示した．いま言及した代数関係式がこの論述の主題のひとつである**正準交換関係**（canonical commutation relation；以下，CCR と略す）である．これは，$2d$ 個の代数的な量 $Q_1, \cdots, Q_d, P_1, \cdots, P_d$（$d$ は自然数）についての次の関係式のことである：

$$[Q_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad [Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, P_k] = 0,$$
$$j, k = 1, \cdots, d.$$

ただし，$[X, Y] = XY - YX$，i は虚数単位，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$（h はプランクの定数），δ_{jk} はクロネッカーのデルタである[5]. フォン・ノイマンはこの CCR こそ量子

2) ゲージ理論というのは，ゲージ対称性とよばれる対称性をもつ理論のことである．一般に，対称性は群から定まる．ゲージ対称性を定める群が可換な場合を**可換ゲージ理論**，非可換な場合を**非可換ゲージ理論**という．荷電粒子（の物質場）と電磁場の相互作用を記述する理論（**量子電磁力学**）は可換なゲージ理論の基本的な例である（この場合の対称性の群は1次元ユニタリ群）．ちなみに，自然界を根底において支配する四種の力（重力，電磁気力，強い力，弱い力）の統一的記述（統一理論の構築）は，ゲージ理論によって可能になるであろうことが期待されている [3]. ゲージ理論ついては，たとえば，数理物理的観点から書かれた [17] や微分幾何学的側面を論じた [21, 26] 等を参照されたい（拙著 [10] の第7章，[11] にゲージ対称性についての初等的解説がなされている）．だが，この小論の大筋を理解するには，ゲージ理論の予備知識は特に必要ではない．

3) AB 効果に関する物理的な議論については，原論文 [1] や [31]（およびそこに引用されている文献）を参照．AB 効果の数学的に厳密な解析をあたえる重要な論文のひとつとして [35] がある．最近，演算子論的な観点から，AB 効果の数理を厳密かつ明解に論じた興味深い論文 [25] が現われた．

4) 量子力学の形成の歴史についてのさらに詳しい記述については，たとえば，[14] の第I部序論や [39] を参照．

5) CCR のことを**ハイゼンベルクの交換関係**という場合もある．

力学の内的本質に属するものであることを見抜いたのである．古典力学から量子力学への移行は“量子化”とよばれる．フォン・ノイマンの観点からは，量子化の本質は代数関係式としてのCCRにある．CCRを基礎にすえる量子化——**正準量子化**——の処方では，古典力学系を記述する一般化座標と一般化運動量は，CCRをみたす代数的な量によっておき換えられなければならないことが要請される．

1.2　CCRの表現

フォン・ノイマンの理論では，量子系の状態はヒルベルト空間の単位ベクトルによって表わされ，物理量はこのヒルベルト空間上で働く自己共役演算子によって記述されることが公理として要請される（ただし，絶対値が1の複素定数を乗じたベクトルは同じ状態を表わすものとされる）．したがって，特に，量子力学的粒子の位置（座標）および運動量も適当なヒルベルト空間上の自己共役演算子によって表わされなければならない．これらの物理量は，正準量子化の処方によれば，すでにふれたように，CCRをみたさなければならない．こうして，CCRをみたす代数的な量をヒルベルト空間上の自己共役演算子として実現すること，すなわち，CCRの表現が問題になる．これは，厳密には次のように定義される．$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間，Q_j, P_j（$j=1,\cdots,d$）を $\mathscr{H}$ 上の自己共役演算子としよう．次の二つの条件(i)，(ii) が成り立つならば，$\{\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ を**自由度 d の CCR の表現**という（$D(T)$ は演算子 T の定義域を表わす）：

(i)　$\mathscr{D} \subset \bigcap_{j,k=1}^{d} [D(Q_jP_k) \cap D(P_kQ_j) \cap D(Q_jQ_k) \cap D(P_jP_k)]$.

(ii)　$\mathscr{D}$ 上で Q_j, P_j（$j=1,\cdots,d$）はCCRをみたす，すなわち，任意の $\psi \in \mathscr{D}$ に対して，

$$[Q_j, P_k]\psi = i\hbar\delta_{jk}\psi, \quad [Q_j, Q_k]\psi = 0, \quad [P_j, P_k]\psi = 0,$$
$$j, k = 1, \cdots, d$$

が成り立つ[6].

例. d 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^d$ 上の関数 ψ で, $\int_{\boldsymbol{R}^d} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ をみたすもの（ルベーグ測度 dx に関して2乗可積分な関数）の全体を $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ とする. ただし, ルベーグ測度について, a.e.（ほとんどいたるところ almost everywhere）等しい関数どうしは同じものとみなす[7]. $\psi, \phi \in L^2(\boldsymbol{R}^d)$ に対して, $\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\boldsymbol{R}^d} \psi(x)^* \phi(x) dx$ とすれば（z^* は複素数 z の複素共役), これは $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ の内積であり, この内積に関して, $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ はヒルベルト空間になる. $Q_j^S = x_j$（$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \boldsymbol{R}^d$ の j 番目の成分 x_j をかける演算子), $P_j^S = -i\hbar D_j$（D_j は x_j に関する超関数の意味での偏微分演算子）[8], $\mathscr{D} = C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$（$\boldsymbol{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で有界な台をもつものの全体）または $\mathscr{D} = \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^d)$（シュワルツ（Schwartz）空間：$\boldsymbol{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で, それ自身およびそのすべての偏導関数が, 無限遠で $|x|$ のいかなる負の整数ベキよりも速く減少するものの全体）とすれば, $\{L^2(\boldsymbol{R}^d), \mathscr{D}, \{Q_j^S, P_j^S\}_{j=1}^d\}$ はCCRの表現である. この表現は**シュレーディンガー表現**とよばれる. というのは, このCCRの表現を用いて量子力学を記述したのが, まさしく, シュレーディンガーの理論であったからである.

シュレーディンガー表現においては, Q_j^S, P_j^S はともに非有界演算子である. 実は, 一般的に, 次のことがいえる：CCRの表現 $\{\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ においては, 各 j に対して, Q_j, P_j の少なくとも一方は非有界でなければならな

---

6) $\mathscr{D}$ として, 各 Q_j, P_j によって不変にされる部分空間, すなわち, $\mathscr{D} \subset \bigcap_{j=1}^d [D(Q_j) \cap D(P_j)]$ であって, 任意の $\psi \in \mathscr{D}$ に対して, $Q_j\psi, P_j\psi \in \mathscr{D}$ となるような部分空間をとる場合もある.

7) したがって, $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ は, 実は, この同一視から定まる同値関係によって類別される（2乗可積分関数の）同値類の集合である. 記号の混用であるが, 関数 ψ の同値類も同じ記号 ψ で表わす.

8) $D(Q_j^S) = \left\{ \psi \in L^2(\boldsymbol{R}^d) \,\middle|\, \int_{\boldsymbol{R}^d} |x_j \psi(x)|^2 dx < \infty \right\}$,
$D(P_j^S) = \{ \psi \in L^2(\boldsymbol{R}^d) \mid D_j\psi \in L^2(\boldsymbol{R}^d) \}$. たとえば, [24] を参照.

い[9)].

フォン・ノイマンは，CCR の表現という観点から，量子力学を統一的にとらえることに成功した．この観点においては，ひとつの量子系の理論的表現が外見上異なる形式をとりうるのは自明のことであり，なんら不思議なことではない．なぜなら，CCR の表現がひとつあたえられたとすれば，これを任意のヒルベルト空間にユニタリ変換でうつしてできる表現も CCR の表現になるからである．そこで，問題は，そうした外見上の相違が，本質的な違いなのか否かを決定することである．すぐにわかることは，いま例としてあげたような，ユニタリ変換で互いにうつりあう表現どうしは，本質的に異なるものではない，ということである．なぜなら，ユニタリ変換は，ヒルベルト空間の構造，演算子の自己共役性，スペクトル，代数的構造等を保存するからである．いま提起された問題は，数学的には，種々の CCR の表現を“同等（同値)”なものとそうでないものとに分類する問題になる．そのためのひとつの方法は，上にあげたシュレーディンガー表現を基準にして，表現を分類することである．そこで次の定義を設ける．

ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の自己共役演算子の組 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^{d}$ に対して，$\mathscr{H}$ の互いに直交する閉部分空間 $\mathscr{H}_n$, $n=1,\cdots,N$（N は有限または可算無限）が存在して，次の (a), (b), (c) が成り立つとき，$\{Q_j, P_j\}_{j=1}^{d}$ を**自由度 d のシュレーディンガー系**という［32］:

(a)　$\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}_n$, $n=1,\cdots,N$, の直和である： $\mathscr{H}=\bigoplus_{n=1}^{N}\mathscr{H}_n$.

(b)　各 Q_j, P_j はすべての $\mathscr{H}_n$ によって簡約（reduction）される（すなわち，E_n を $\mathscr{H}_n$ への直交射影とすれば，任意の $\psi\in D(Q_j)$ に対して，$E_n\psi\in D(Q_j)$ であり，$Q_jE_n\psi=E_nQ_j\psi$ が成り立つ．P_j についても同様）[10)].

(c)　各 n に対して，$\mathscr{H}_n$ から $L^2(\mathbf{R}^d)$ へのユニタリ変換 U_n が存在して，演算子の等式 $U_nQ_jU_n^{-1}=Q_j^S$，$U_nP_jU_n^{-1}=P_j^S$，$j=1,\cdots,d$，が成立する．

条件 (b), (c) は, Q_j, P_j を $\mathscr{H}_n$ に制限して考えた演算子が, それぞれ, Q_j^S, P_j^S にユニタリ同値であることを意味する. したがって, 自由度 d のシュレーディンガー系はシュレーディンガー表現と本質的に同じ表現であるとみなせる. この理由から, CCR の表現 $\{\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ について, $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$ が自由度 d のシュレーディンガー系であるとき, これを **同値な表現** とよび, そうでない表現は, **非同値な表現** ということにする[11].

1.3 CCR のヴァイル型表現とフォン・ノイマンの一意性定理

すでに注意したように, CCR の表現には必ず非有界演算子が関与する. この事実のために, CCR の表現の一意性の問題 (すなわち, CCR の表現は, 同値なものに限られるか否かという問題) は微妙な側面をもつことになる. この困難をさけるひとつの方法は, Q_j, P_j の適当な関数を用いて, CCR をこれと形式的に同等な関係式に書き直し, 後者について, 有界演算子による表現の可能性を考察することである. 実際, これは可能であって, ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上に CCR の表現 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$ があたえられたとすれば, Q_j, P_j が生成する 1 パラメーターユニタリ群 $\{e^{itQ_j}\}_{t\in R}$, $\{e^{itP_j}\}_{t\in R}$ は形式的に次の関係式をみ

9) [9] の 2.1 節, [15] の pp.318 − 319, [33] の p.274, Example 2 等を参照.

10) 大ざっぱに言えば, Q_j, P_j が各 $\mathscr{H}_n$ を不変にするということであるが, ここで述べられていることは, 概念的にはもっと強い性質の事がらである. この違いは決してささいなことではない. 非有界な演算子が関わる代数の表現を正しく考察するには, 概念上の厳密な区別はきわめて重要である. このことをぬきしては, 非有界演算子が織りなす不思議で豊かな世界を正しく, かつ明晰にとらえることは不可能である. 演算子の簡約の概念については, たとえば, [23] の 2.3 節を参照されたい.

11) 同値な表現どうしであれば, Q_j, P_j から構成される物理量に関する物理的結果は一致する. なぜなら, ユニタリ変換は, 内積や自己共役演算子のスペクトルを不変にするからである. ボルン-ハイゼンベルク-ヨルダンが用いた, CCR の表現は同値な表現の例である. これは, ヒルベルト空間として, 2 乗総和可能な複素数列からなるヒルベルト空間をとり, 調和振動子のハミルトニアン $\sum_{j=1}^{d}(Q_j^2+P_j^2)$ が無限対角行列として実現されるような表現である. こうして, なぜ, シュレーディンガーの理論とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダンの理論が同一の結果をあたえるのかが明らかになる.

たすことが示される[12)]：

$$e^{itQ_j}e^{isP_k} = e^{-its\delta_{jk}}e^{isP_k}e^{itQ_j},$$

$$e^{itQ_j}e^{isQ_k} = e^{isQ_k}e^{itQ_j}, \quad e^{itP_j}e^{isP_k} = e^{isP_k}e^{itP_j}, \qquad t, s \in \boldsymbol{R}.$$

これらの関係式は **ヴァイル**（H. Weyl）**の関係式** とよばれる．そこで，自己共役演算子の組 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^{d}$ がヴァイルの関係式をみたすとき，これをCCRの **ヴァイル型表現** とよぶ．

シュレーディンガー表現の自己共役演算子の組 $\{Q_j^S, P_j^S\}_{j=1}^{d}$ がCCRのヴァイル型表現であることを示すのはそれほど難しくはない．

ヴァイル型表現に関しては，次の意味で一意性が成り立つ：

フォン・ノイマンの一意性定理　$\{Q_j, P_j\}_{j=1}^{d}$ を可分なヒルベルト空間上の，CCRの **ヴァイル型表現** とすれば，これは，自由度 d のシュレーディンガー系である．

この定理から，特に，CCRのヴァイル型表現はCCRの同値な表現であることが導かれる．

1.4　CCRの非同値表現とAB効果

ところで，ヴァイル型ではないCCRの表現に関しては，フォン・ノイマンの一意性定理の結論はもはや一般には成立しない．つまり，非同値な表現が存在しうるのである[13)]．実際，これまで，何人かの研究者によって，CCRの非同値な表現の研究がなされてきた［12, 16, 36, 37, 38］[14)]．しかし，これらの研究において得られた，CCRの非同値な表現が物理と関わりがあるかどうかは不明であった[15)]．

最近，レー（H. Reeh）［34］によって，CCRの非同値な表現で物理的にも興味のあるものが発見された．1個の荷電粒子が，3次元空間の原点を z 軸方向に貫く磁場が存在する状況のもとで，2次元 x-y 平面の中を運動するような量子系を考える．レーは，このような系における粒子の位置演算子と物理的

運動量演算子（= 質量 × 速度演算子）は，$L^2(\boldsymbol{R}^2)$ の適当な部分空間上でCCRの表現をあたえること，そして，もし，磁束の大きさが，ある可算無限個のとびとびの値をとらなければ，この表現は非同値な表現になることを示した．この場合の非同値な表現がなぜ興味があるのかといえば，それがはじめにふれたAB効果のひとつの数学的表現をあたえるからなのである．レーの研究において得られた，AB効果とCCRの表現の関連は，互いに同値ではないCCRの表現は異なる物理を記述する，という美しい理念にわれわれを誘う．

筆者は，この理念をさらに深く掘り下げるために，いまふれたレーの仕事を一般的な観点から再考察し，磁場の特異性が原点だけではなく，任意の有限個の点に集中しているような2次元量子系において，位置演算子と物理的運動量演算子があたえるCCRの表現に関わる数学的構造を明らかにした［4］[16]．

この量子系は，非単連結領域上の量子力学の興味ある例になっていることを強調しておこう．第3節で見るように，CCRの非同値な表現の存在にとって，

12）自己共役演算子 A に対して，演算子 e^{itA} $(t \in \boldsymbol{R})$ は，A のスペクトル測度 E を用いて，$e^{itA} = \int_{\boldsymbol{R}} e^{it\lambda} dE(\lambda)$ によって定義され，ユニタリ演算子になる（たとえば，［42］の2章を参照）．ここにあげた関係式を発見法的に導くには，$e^{itQ_j} = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n Q_j^n / n!$，$e^{isP_j} = \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n P_j^n / n!$ と形式的に展開し，CCRを用いて形式的に計算をすればよい（［15］の p.319を参照）．もちろん，このような計算は，そのままでは，発見法的な意味があるだけであり，数学的な正しさは保証されない．

13）物理の教科書や文献では，ヴァイル型ではないCCRの表現に関しても一意性が成立するかのような書き方をしているものがあるが，これは一般には誤りである．この点は，ここで特に強調しておきたい．ヴァイル型ではないCCRの表現の一意性を導くには付加的な条件を課す必要がある．これに関する基本的な結果はレリッヒ-ディクスミエール（Rellich-Dixmier）の定理として知られている（［9］の2.4節，［32］の4章を参照）．

14）［36, 37, 38］に詳しい文献表がある．

15）ただし，［12］における研究は，古典力学の角変数の量子化と関連している．

16）AB効果の表現論的研究はすでに［18］に見られる．この論文では，局所的なカレント代数（current algebra）の表現とAB効果の関係が論じられている．最近，［34, 4］におけるCCRの表現を幾何学的な観点から構成する研究がなされた［22］．磁場が通過する穴が点ではなく，円である場合の研究は［19］で論じられている．

荷電粒子が運動する領域の非単連結性は本質的である．

位置演算子と物理的運動量演算子があたえるCCRの表現は，磁場のそれぞれの特異点における磁束がある単位の整数倍になるかならないかで同値な表現であるか否かが決まる（定理3.5，定理3.6を参照）．上に述べた理念に照らして言えば，表現が同値である場合とそうでない場合に応じて，系の物理がどのように変わるかを調べることは興味がある．そのためには，位置演算子と物理的運動量演算子からつくられる適当な物理量（たとえば，ハミルトニアン）の演算子論的性質を研究する必要がある．この観点から，筆者は，[5]において，そのような特異な磁場を記述するベクトルポテンシャルから定まるディラック-ヴァイル演算子をとりあげ，自己共役拡張の問題や零エネルギー状態の存在と縮退について解析した（5.1項を参照）．これらの研究は，ゲージ理論の観点からは，可換なゲージ理論の場合に関するものであった．非可換なゲージ理論の場合にどのようになるかは当然興味のあるところである．この場合に対する研究は，[6]において遂行され，可換なゲージ理論の場合の諸結果が自然な形で拡張されることが示された．非可換なゲージ理論において現われる，CCRの非同値表現にもAB効果に類似した物理的現象が対応していると考えられる[17)]．

以下において，上にそのあらましを述べた，AB効果に関わる，CCRの表現の数理の詳細を見ていくことにしよう．

2° 特異な磁場をもつ2次元量子系におけるCCRの表現

2.1　磁場の中を運動する荷電粒子の物理的運動量

2次元平面 $\boldsymbol{R}^2=\{\,\boldsymbol{r}=(x,y)\mid x,y\in\boldsymbol{R}\,\}$ の中に N 個の点 $\boldsymbol{a}_n=(a_{n1},a_{n2})$，$n=1,\cdots,N$，を任意に固定し（$N\geq 1$），電荷 $q\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ の荷電粒子が，この平面と垂直な方向をもつ磁場の影響下で，非単連結領域

$$M=\boldsymbol{R}^2\setminus\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_N\}$$

の中を運動する量子系を考えよう．古典電磁気学でよく知られているように，磁場はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=(A_1(\boldsymbol{r}),A_2(\boldsymbol{r}))$（$M$ 上の $\boldsymbol{R}^2$-値関数）によって記述される．各 A_j は M 上で連続微分可能であるとする[18]．磁場が点 $\boldsymbol{a}_n$, $n=1,\cdots,N$, において特異性をもつような場合も考慮したいので，磁場は，

$$B=D_xA_2-D_yA_1$$

によって定義される，$\boldsymbol{R}^2$ 上の超関数と考える．ここで，D_x,D_y は，それぞれ，x,y に関する超関数の意味での偏微分演算子である．

以下では，$\hbar=1$，光速 $c=1$ となる物理単位系を用いる．自由な荷電粒子の位置演算子 $\boldsymbol{Q}=(Q_1,Q_2)$ と運動量演算子 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$ に対して，シュレーディンガー表現を採用する．したがって，系の状態のヒルベルト空間は $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ であり，Q_j,p_j は

$$Q_1=x\ (x\text{ によるかけ算演算子}),\qquad Q_2=y\ (y\text{ によるかけ算演算子}),$$
$$p_1=-iD_x,\qquad p_2=-iD_y$$

という形をとる[19]．荷電粒子の**物理的運動量** $\boldsymbol{P}=(P_1,P_2)$ は

$$P_1=p_1-qA_1,\qquad P_2=p_2-qA_2$$

によって定義される[20]．

M 上の無限回微分可能な関数で，M の中に有界な台をもつものの全体を

17）たとえば，ゲージ場と相互作用する粒子がクォークであるならば，クォークについての"AB効果"．

18）だが，A_j は点 $\boldsymbol{a}_n$ $(n=1,\cdots,N)$ において特異でありうる．後に明らかになるように，ここでの考察にとっては，A_j が点 $\boldsymbol{a}_n$ $(n=1,\cdots,N)$ で特異性をもつ場合が重要である．

19）本来ならば，状態のヒルベルト空間は $L^2(M)$ $(\int_M|\psi(x)|^2dx<\infty$ となる，M 上のルベーグ可測関数 ψ の同値類全体がつくるヒルベルト空間）とすべきである．だが，$\boldsymbol{R}^2\setminus M=\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^N$ は2次元ルベーグ測度に関して零集合であるので，自然な仕方で，$L^2(M)=L^2(\boldsymbol{R}^2)$ という同一視ができる．

20）この小論では，特に断らない限り，二つの線形演算子 T,S の和 $T+S$ の定義域は $D(T)\cap D(S)$ であるとする．荷電粒子の質量を $m>0$ とすれば，$(P_1/m,P_2/m)$ は**速度演算子**である．

$C_0^\infty(M)$ とすれば，$D(P_j)=D(p_j)\cap D(A_j)\supset C_0^\infty(M)$ である．したがって，$D(P_j)$ は $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ で稠密である．容易にわかるように，P_j（$j=1,2$）は対称演算子である．これが実際に物理量であるためには，その本質的自己共役性を示す必要がある．次の定理が成り立つ．

定理 2.1　各 P_j は $C_0^\infty(M)$ 上で本質的に自己共役である．さらに，P_j の閉包を $\bar{P}_j$ とすれば，すべての $\psi\in L^2(\boldsymbol{R}^2)$ と $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$(e^{it\bar{P}_1}\psi)(x,y) = \exp\left(-iq\int_x^{x+t}A_1(x',y)\,dx'\right)\psi(x+t,y),\quad \text{a.e. }(x,y) \tag{2.1}$$

$$(e^{it\bar{P}_2}\psi)(x,y) = \exp\left(-iq\int_y^{y+t}A_2(x,y')\,dy'\right)\psi(x,y+t),\quad \text{a.e. }(x,y) \tag{2.2}$$

が成立する．

この定理の証明については，[4]，[22]，[8] を参照されたい．

2.2　ゲージ変換と幾何学的解釈

Λ を M 上の実数値連続関数とするとき，M 上の関数 ψ の変換 $\psi\to e^{iq\Lambda}\psi$ は**局所的第一種ゲージ変換**とよばれる．

$\boldsymbol{R}^2\setminus M$ は2次元ルベーグ測度に関して零集合であるので，局所的第一種ゲージ変換は，$L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上に，関数 $e^{iq\Lambda}$ によるかけ算演算子としてユニタリ演算子を一意的に定義する．これも同一の記号 $e^{iq\Lambda}$ で表わす．一般に，$L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上の演算子 T のゲージ変換を $e^{iq\Lambda}Te^{-iq\Lambda}$ によって定義する．

Λ が連続微分可能であれば，

$$e^{iq\Lambda}P_je^{-iq\Lambda} = p_j - qA_j',\qquad j=1,2$$

が成立する．ただし，

$$A_1' = A_1 + \frac{\partial\Lambda}{\partial x},\qquad A_2' = A_2 + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}.$$

つまり，P_j のゲージ変換は，P_j において，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}'=$

(A_1', A_2') におき換えることと同等である．対応 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ はベクトルポテンシャルのゲージ変換に他ならない[21]．この意味で，$\boldsymbol{P}$ はゲージ共変な運動量ともよばれる．

局所的第一種ゲージ変換および (2.1)，(2.2) の幾何学的意味について簡単にふれておこう．そのために，M の各点 $\boldsymbol{r}$ に1次元ユニタリ空間 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C}$（ガウス平面）を対応させて考える．この $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}}$ は，物理的には，点 $\boldsymbol{r}$ に付随する“内部空間”とみなされる．各 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}}$ には1次元ユニタリ群 $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \boldsymbol{R}\}$ が働く．Λ を M 上の実数値連続関数とすれば，M の各点 $\boldsymbol{r}$ ごとに $e^{iq\Lambda(\boldsymbol{r})}$ は $U(1)$ の元である．関数 ψ の点 $\boldsymbol{r}$ における値 $\psi(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}}$ のベクトルとみなせる．したがって，$e^{iq\Lambda(\boldsymbol{r})}\psi(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}}$ のベクトル $\psi(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}}$ の中で角度 $q\Lambda(\boldsymbol{r})$ だけ回転する変換である．こうして，局所的第一種ゲージ変換 $\psi \to e^{iq\Lambda}\psi$ は，関数 ψ によって定まる，内部空間のベクトルを各点ごとに一般には異なった角度で回転する変換を表わす[22]．

M の2点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ に対して，$\boldsymbol{r}_1$ を始点，$\boldsymbol{r}_2$ を終点とする，M の中の任意の連続曲線を $C_{\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1}$ とする．このとき，

$$\Gamma_A(C_{\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1}) = \exp\left(iq \int_{C_{\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}\right)$$

は $U(1)$ の元である．詳細は省略するが，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ から定まる磁場 B が存在する状況のもとで，$C_{\boldsymbol{r}_1}$ のベクトル $v(\boldsymbol{r}_1)$ を $C_{\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1}$ に沿って点 $\boldsymbol{r}_2$ まで“平行移動”して得られる，$C_{\boldsymbol{r}_2}$ のベクトルは $\Gamma_A(C_{\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1})v(\boldsymbol{r}_1)$ によってあたえられる[23]．これは，

21） **第二種ゲージ変換**.

22） これとは対照的に，Λ が定数の場合は，空間のどの点でも回転する角度は同じなので，**大局的第一種ゲージ変換** とよばれる．この変換の一般化（局所化）が局所的第一種ゲージ変換である．

23） たとえば，［17］の §4.2 を参照．微分幾何学の言葉で述べれば，M 上の1形式 $A = A_1 dx + A_2 dy$ は，$U(1)$ を構造群とする，M 上のベクトル束 $M \times \boldsymbol{C}$ の接続である．B は“曲率”（の成分）を表わす．$\Gamma_A(C_{\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1})$ はこの接続による平行移動をあたえる．平行移動の厳密な定義については，たとえば，［21］の2章，§8を参照．

$$\Gamma_{A'}(C_{r_2,r_1}) = e^{iq\Lambda(r_2)}\Gamma_A(C_{r_2,r_1})e^{-iq\Lambda(r_1)}$$

が成り立つという意味でゲージ共変的である．

いま述べた幾何学的解釈を用いると，(2.1) の右辺，したがって，$(e^{it\overline{P}_1}\psi)(x,y)$ は，$C_{(x+t,y)}$ のベクトル $\psi(x+t,y)$ を直線 $(x+t,y)\to(x,y)$ に沿って平行移動して得られる，C_r のベクトルを表わすことがわかる．同様に，(2.2) から，$(e^{it\overline{P}_2}\psi)(x,y)$ は，$C_{(x,y+t)}$ のベクトル $\psi(x,y+t)$ を直線 $(x,y+t)\to(x,y)$ に沿って平行移動して得られる，C_r のベクトルを表わす．

2.3　CCR の表現

M 上で $B=0$ のとき，$\boldsymbol{A}$ は**平坦** (flat) であるという．

容易にわかるように，任意の $\psi\in C_0^2(M)$ (M 上の2回連続微分可能な関数で，その台が有界で M の中に含まれるものの全体) に対して

$$[Q_j,P_k]\psi = i\delta_{jk}\psi,\qquad [Q_j,Q_k]\psi = 0,\qquad j,k=1,2,$$

$$[P_1,P_2]\psi = iqB\psi$$

が成り立つ．したがって，次の補題を得る．

補題 2.2　$\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j,\overline{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が自由度2の CCR の表現であるための必要十分条件は $\boldsymbol{A}$ が平坦であることである．

$\boldsymbol{A}$ が平坦であることは，超関数としての磁場 B の台が $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ に集中していることを意味する．この場合，超関数の一般論によれば，そのような磁場 B は

$$B(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=0}^{k}\lambda_{\alpha\beta}^{(n)}D_x^{\alpha}D_y^{\beta}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n)$$

という形をもつ．ここで，k は非負の整数，$\lambda_{\alpha\beta}^{(n)}$ ($\alpha,\beta=0,1,\cdots,k$, $n=1,\cdots,N$) は実定数である[24]．この磁場をあたえるベクトルポテンシャルとして (ゲージ変換の任意性を除いて) 次のものがとれる：

$$A_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=0}^{k}\lambda_{\alpha\beta}^{(n)}D_x^{\alpha}D_y^{\beta}\left(\frac{y-a_{n2}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|^2}\right), \tag{2.3}$$

$$A_2(x, y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta=0}^{k}\lambda_{\alpha\beta}^{(n)}D_x^{\alpha}D_y^{\beta}\left(\frac{x-a_{n1}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|^2}\right). \tag{2.4}$$

これは，公式

$$\frac{x-a_{n1}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|^2} = D_x \log|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|, \qquad \frac{y-a_{n2}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|^2} = D_y \log|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|,$$

$$(D_x^2+D_y^2)\log|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n| = 2\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n)$$

を用いれば，容易に確かめられる．

こうして，特異な磁場をもつ2次元量子系において，CCRの（非自明な）表現が実現していることがわかる．そこで次の問題は，この表現が同値なものであるか否かを決定することである．

3° ヴァイル型の交換関係とCCRの表現の特徴づけ

3.1 ヴァイル型の交換関係

前節の最後に述べた問題を解くには，$Q_j, \overline{P}_j$，$j = 1, 2,$ に対して，ヴァイル型の交換関係を計算してみればよい．これは (2.1)，(2.2) を用いてなされる．その結果を述べるために，いくつかの記号を定義する．$x, y, s, t \in \boldsymbol{R}$ に対して，点 $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ から点 $(x+s, y+t) \in \boldsymbol{R}^2$ へ向かう二つの曲線 $C_{\pm}(x, y; s, t)$ を

$$\begin{aligned} C_{-}(x, y; s, t) &= \{(x+\theta s, y) \mid 0 \le \theta \le 1\} \\ &\quad \cup \{(x+s, y+\theta t) \mid 0 \le \theta \le 1\}, \\ C_{+}(x, y; s, t) &= \{(x, y+\theta t) \mid 0 \le \theta \le 1\} \\ &\quad \cup \{(x+\theta s, y+t) \mid 0 \le \theta \le 1\} \end{aligned}$$

24）たとえば，［42］の4章§1，例題5を参照．

によって定義し，

$$C(x,y;s,t) = C_-(x,y;s,t)\circ C_+(x,y;s,t)^{-1}$$

とおく．これは，$(x,y) \to (x+s,y) \to (x+s,y+t) \to (x,y+t) \to (x,y)$ のように進む長方形の閉曲線である（図2を参照）．

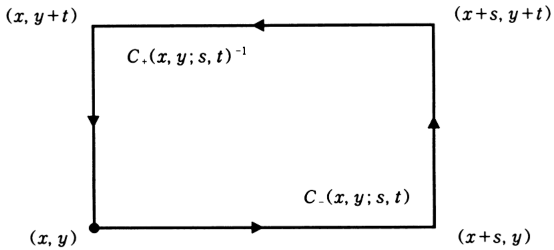


図2　曲線 $C_\pm(x,y;s,t)$，$C(x,y;s,t)$（$s,t>0$ の場合）

各 $s,t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $S_1^{(s)}, S_2^{(t)}$ と $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $M_{s,t}$ を次のように定義する：

$$S_1^{(s)} = \boldsymbol{R}\setminus\{a_{n1}, a_{n1}-s\}_{n=1}^N, \qquad S_2^{(t)} = \boldsymbol{R}\setminus\{a_{n2}, a_{n2}-t\}_{n=1}^N$$

$$M_{s,t} = S_1^{(s)}\times S_2^{(t)}.$$

$M_{s,t}$ 上の関数 $\Phi_{s,t}^A$ を

$$\Phi_{s,t}^A(x,y) = \int_{C(x,y;s,t)} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}', \qquad (x,y)\in M_{s,t}$$

によって定義する[25]．これは，物理的には，閉曲線 $C(x,y;s,t)$ の内部を貫く磁束を表わす．集合 $\boldsymbol{R}^2\setminus M_{s,t}$ の2次元ルベーグ測度は0であるから，関数 $\Phi_{s,t}^A(x,y)$ は，$\boldsymbol{R}^2$ 上の a.e. 有限な実数値関数とみなせる．したがって，$\Phi_{s,t}^A$ は $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上の自己共役なかけ算演算子を一意的に定義する．このかけ算演算子も同一の記号で書くことにする．

(2.1)，(2.2) を用いると，次の結果が得られる．

定理 3.1　すべての $s, t \in \boldsymbol{R}$ と $j, k = 1, 2$ に対して

$$e^{isQ_j} e^{it\bar{P}_k} = e^{-is\delta_{jk}} e^{it\bar{P}_k} e^{isQ_j}, \tag{3.1}$$

$$e^{is\bar{P}_1} e^{it\bar{P}_2} = \exp(-iq\Phi_{s,t}^A) e^{it\bar{P}_2} e^{is\bar{P}_1} \tag{3.2}$$

が成り立つ.

注意　定理 3.1 において，A は平坦である必要はない.

2.2 節で述べた幾何学的解釈によれば，$\psi \in L^2(\boldsymbol{R}^2)$ に対して，$(e^{is\bar{P}_1} e^{it\bar{P}_2} \psi)(x, y)$ は，磁場 B が存在する状況のもとで，$\boldsymbol{C}_{(x+s, y+t)}$ のベクトル $\psi(x+s, y+t)$ を曲線 $C_-(x, y; s, t)^{-1}$ に沿って平行移動して得られる，$\boldsymbol{C}_{(x, y)}$ のベクトルを表わし，$(e^{it\bar{P}_2} e^{is\bar{P}_1} \psi)(x, y)$ は，それを曲線 $C_+(x, y; s, t)^{-1}$ に沿って平行移動して得られる，$\boldsymbol{C}_{(x, y)}$ のベクトルを表わす．したがって，(3.2) は，これら二つの平行移動の結果が一般には一致しないことを示す．この事実は，後に AB 効果と CCR の表現の対応を見る上で重要である.

3.2　磁束の局所的量子化と CCR の表現の同値性

すべての t, s に対して，$\Phi_{s,t}^A$ が，$2\pi\boldsymbol{Z}/q = \{2\pi m/q \mid m \in \boldsymbol{Z}$ (整数全体)$\}$ の中に値をとる関数，すなわち，$M_{s,t}$ 上の $2\pi\boldsymbol{Z}/q$-値関数であるとき，**磁束は局所的に量子化されている**ということにする．これは，$C(x, y; s, t)$ を貫く磁束が局所的に定数であって，その定数値が $2\pi/q$ の整数倍であるということである.

以下，3.4 項まで，A は平坦であると仮定する.

定理 3.2　CCR の表現 $\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \bar{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が同値な表現であるための必要十分条件は，磁束が局所的に量子化されていることである.

(証明)　CCR の表現 $\Pi \equiv \{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \bar{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が同値ならば，e^{isQ_j},

25)　$(x, y) \in M_{s,t}$ ならば，$C(x, y; s, t)$ は，点 $\boldsymbol{a}_n$，$n = 1, \cdots, N$，を通らないことに注意.

$e^{it\bar{P}_k}$ はヴァイルの関係式をみたす．これと定理3.1によって，磁束は局所的に量子化されていなければならない．逆に，磁束が局所的に量子化されていれば，定理3.1により，e^{isQ_j}, $e^{it\bar{P}_k}$ はヴァイルの関係式をみたす．したがって，フォン・ノイマンの一意性定理により，Π は同値な表現である．□

3.3　磁束が局所的に量子化される条件

いま，$\delta_0 = \min\{|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m| \mid n \neq m,\ n, m = 1, \cdots, N\}$ とし，$0 < \varepsilon < \delta_0$ に対して，中心が $\boldsymbol{a}_n$，半径 $\varepsilon > 0$ の円周 $C_\varepsilon(\boldsymbol{a}_n) = \{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^2 : |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_n| = \varepsilon\}$（向きは反時計回り）に沿っての，$\boldsymbol{A}$ の線積分を γ_n とする：

$$\gamma_n(\boldsymbol{A}) = \int_{C_\varepsilon(\boldsymbol{a}_n)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

$D(x, y; s, t)$ を閉曲線 $C(x, y; s, t)$ の内部領域とする．グリーンの定理を応用することにより，次の事実を証明できる．

補題 3.3　各 $\gamma_n(\boldsymbol{A})$ は ε によらない定数であり，すべての $s, t \in \boldsymbol{R}$ と $(x, y) \in M_{s,t}$ に対して，

$$\Phi_{s,t}^{A}(x, y) = \mathrm{sgn}(s)\,\mathrm{sgn}(t) \sum_{\boldsymbol{a}_n \in D(x, y; s, t)} \gamma_n(\boldsymbol{A})$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{sgn}(t)$ は符号関数である：$t \geq 0$ ならば $\mathrm{sgn}(t) = 1$，$t < 0$ ならば，$\mathrm{sgn}(t) = -1$．$\sum_{\boldsymbol{a}_n \in D(x, y; s, t)}$ は，$\boldsymbol{a}_n$ が $D(x, y; s, t)$ に含まれるようなすべての n についての和を表わす（そのような n がない場合には，上式の右辺は 0 であるとする）．

補題3.3からただちに次の結果が得られる．

定理 3.4　磁束が局所的に量子化されるための必要十分条件は，すべての $n = 1, \cdots, N$ に対して，$\gamma_n(\boldsymbol{A}) \in 2\pi\boldsymbol{Z}/q$ となることである．

3.4 CCRの表現の特徴づけ

定理3.2と定理3.4を組み合わせれば，上記のCCRの表現を完全に特徴づける次の定理を得る．

定理3.5 CCRの表現 $\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \overline{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が同値な表現であるための必要十分条件は，すべての $n=1, \cdots, N$ に対して，$\gamma_n(\boldsymbol{A}) \in 2\pi\boldsymbol{Z}/q$ となることである．

この定理は次のように読み換えることができる：

定理3.6 CCRの表現 $\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \overline{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が非同値な表現であるための必要十分条件は，$\gamma_n(\boldsymbol{A}) \notin 2\pi\boldsymbol{Z}/q$ となる n が存在することである．

注意 CCRの表現 $\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \overline{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が非同値である状況には次の事実が対応している：$C_0^2(M)$ 上では，$\overline{P}_1$ と $\overline{P}_2$ は可換であるが（すなわち，任意の $\psi \in C_0^2(M)$ に対して，$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]\psi = 0$），$e^{is\overline{P}_1}$ と $e^{it\overline{P}_2}$ が可換にはならない $s, t \in \boldsymbol{R}$ が存在する．このような現象は，“Nelsonの現象”とよばれる（[27]，[33] の§VIII.5を参照）．この現象は，非有界演算子に対しては，形式的な計算（たとえば，形式的ベキ級数展開による計算）がいかに危ういものでありうるかを警告する．他方，それは，演算子論的な観点から見ると，非有界演算子に対しては，可換性の概念が複数ありうることを示唆し，実際，理念的現実はそうなっているのである [38]．二つの自己共役演算子 T, S のそれぞれのスペクトル測度が可換であるとき，T と S は**強可換**（strongly commuting）であるという．この概念は，素朴な意味での可換性（適当な稠密部分空間上で $[T, S]=0$ となること）よりも強い可換性の概念である．T, S がともに有界ならば，通常の意味での可換性と強可換性は一致する．T と S が強可換であるための必要十分条件は，すべての $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して，e^{iaS} と e^{ibT} が可換となることである [33, Theorem VIII.13]．こうして，CCRの表現 $\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \overline{P}_j\}_{j=1}^2\}$ の非同値性は，演算子論的には，$\overline{P}_1, \overline{P}_2$ が，素朴な意味では可換であるが，強可換ではないことと対応してることがわかる．

第4節で述べるように，$\gamma_n(\boldsymbol{A}) \notin 2\pi\boldsymbol{Z}/q$ となるような，平坦なベクトルポテンシャルは“十分たくさん”存在する．

3.5　AB効果との対応

ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が平坦であるとき，磁場 B は点 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_N$ に集中しているので，M の中を運動する荷電粒子は，磁場とは直接相互作用をしない．ところで，すでに見たように，CCRの表現 $\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \overline{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が非同値になるのは，磁束が局所的に量子化されていない場合であり，しかもこのときに限られる．磁束が局所的に量子化されていないとき，$\gamma_n(\boldsymbol{A}) \notin 2\pi\boldsymbol{Z}/q$ となる点 $\boldsymbol{a}_n$ が少なくともひとつある．$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_N\} \cap D(x, y; s, t) = \{\boldsymbol{a}_n\}$ となるように $C(x, y; s, t)$ をとれば，補題3.3と（3.2）によって，

$$(e^{is\overline{P}_1}e^{it\overline{P}_2}\psi)(x, y) = \exp(-iq\,\mathrm{sgn}(s)\,\mathrm{sgn}(t)\gamma_n(\boldsymbol{A}))(e^{it\overline{P}_2}e^{is\overline{P}_1}\psi)(x, y)$$

が成り立つ．したがって，そのような s, t に対しては，$e^{is\overline{P}_1}$ と $e^{it\overline{P}_2}$ は可換ではない．定理3.1のあとに述べた幾何学的解釈によれば，この式は，$\boldsymbol{C}_{(x+s, y+t)}$ のベクトル $\psi(x+s, y+t)$ を曲線 $C_-(x, y; s, t)^{-1}$ に沿って平行移動した結果と曲線 $C_+(x, y; s, t)^{-1}$ に沿って平行移動した結果が一致しないことを意味する（ただし，$\psi=0$ というトリヴィアルな場合は除く）．これは物理的には，$(x+s, y+t)$ から出発して，$C_-(x, y; s, t)^{-1}$ を通って (x, y) に着く荷電粒子の波の位相と $C_+(x, y; s, t)^{-1}$ を通って (x, y) に着くそれが一致しないでずれることを意味する．これはまさにAB効果であると解釈される．こうして，CCRの表現 $\{L^2(\boldsymbol{R}^2), C_0^2(M), \{Q_j, \overline{P}_j\}_{j=1}^2\}$ が非同値である場合とAB効果が対応していることがわかる．この解釈では，AB効果は，純粋に幾何学的でトポロジカルなものであって，系の力学の詳細（ハミルトニアンの形）には依存しないことに注意しよう．

注意　磁場が超伝導体の中に閉じこめられている場合には，磁束が量子化されることはよく知られている［41］．この場合，磁束のとりうる値は，$h/2e$（e は基本電荷）の整数倍，したがって，$\hbar=1$ の単位系では，π/e の整数倍である．これからわかるように，この量子化は，この小論で定義した，磁束の局所的量子化とは若干の違いがある．しかし，まさに，この違いこそ重要である．なぜ

なら，考察下にある荷電粒子が電子の場合，$q=-e$ であるので，$\boldsymbol{a}_n$ を通る磁束が π/e の奇数倍ならば，磁束は局所的には量子化されていないからである．したがって，この場合にはAB効果が起こる．こうして，超伝導体の中に閉じこめられた磁場を用いてAB効果の実験を行なう場合，磁束が π/e の偶数倍（この場合にはAB効果は生じない）か奇数倍かに応じて，AB効果を検出するための干渉縞のパターンの変化には2通りしかないことが結論される．これはまさしく実験事実と一致する［41］．

4° 平坦なベクトルポテンシャルの特徴づけ

すでに見たように，(2.3)，(2.4) によって定義されるベクトルポテンシャルは平坦である．次の定理は平坦なベクトルポテンシャルの完全な特徴づけをあたえる．

定理 4.1　M 上で連続微分可能なベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2)$ が平坦であるための必要十分条件は，M 上で2回連続微分可能な実数値関数 ϕ と実定数 c_n，$n=1,\cdots,N$，が存在して，

$$A_1(\boldsymbol{r}) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n(y-a_{n2})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|^2}+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}$$
$$A_2(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{N}\frac{c_n(x-a_{n1})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_n|^2}+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y} \tag{4.1}$$

が成立することである．この場合，

$$\gamma_n(\boldsymbol{A}) = 2\pi c_n, \qquad n=1,\cdots,N. \tag{4.2}$$

証明については，［7］の Theorem 6.2 または［9］の §3.3 を参照されたい．

注意　(i)　(4.2) により，c_n，$n=1,\cdots,N$，のうちひとつでも $1/q$ の整数倍でなければ，上の形の平坦ポテンシャルから決まる磁場の磁束は局所的に量子化されていない．

(ii)　(2.3)，(2.4) によってあたえられる平坦なベクトルポテンシャルが

(4.1) の形に書けることを示すのは難しくない.

5° 関連する話題

5.1 ディラック-ヴァイル演算子

σ_j, $j = 1, 2, 3$, をパウリ (Pauli) 行列としよう：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ディラック-ヴァイル演算子は

$$\not{D} = \sigma_1 \overline{P}_1 + \sigma_2 \overline{P}_2$$

によって定義される．この演算子が作用するヒルベルト空間は，$\boldsymbol{C}^2$-値の L^2 関数の全体

$$L^2(\boldsymbol{R}^2; \boldsymbol{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \middle| \ \psi_\pm \in L^2(\boldsymbol{R}^2) \right\} = L^2(\boldsymbol{R}^2) \oplus L^2(\boldsymbol{R}^2)$$

である．この演算子に関して次の諸点が解析された [5].

- **本質的自己共役性と自己共役拡大の問題**．ベクトルポテンシャルが特異でありうるために，これらの問題は微妙な側面をもつ．
- **$\not{D}$ の適当な自己共役拡大の零エネルギー状態の存在と縮退度**．この場合には，アハラノフ-キャシャー (Aharonov-Casher) の定理 [2] (磁場がなめらかで有界な台をもつような場合のディラック-ヴァイル演算子あるいはパウリ ハミルトニアン $\not{D}^2$ の零エネルギー状態の縮退度に関する結果) はもはや成立しない．磁束が局所的に量子化されている場合，零エネルギー状態は存在しない．磁束が局所的に量子化されていない場合 (ただし，$N \geq 2$)，零エネルギー状態は一般には縮退し，付加的な条件のもとで，その縮退度は，$N \to \infty$ のとき，無限大になる．

・**スペクトル.** $\not{D}$ を $C_0^\infty(M)\oplus C_0^\infty(M)$ に制限して得られる演算子の任意の自己共役拡大のスペクトルは $\boldsymbol{R}$ に等しい.

5.2 零エネルギー状態密度の強結合極限

磁場 B がなめらかで適当な条件をみたすとき, B はディラック-ヴァイル演算子（あるいは, 同じことだが, パウリハミルトニアン）の零エネルギー状態密度のある強結合極限として復元される (Erdös [13]). これは, アハラノフ-キャシャーの定理の局所形式と見られる. われわれの場合, アハラノフ-キャシャーの定理は成立しないので, Erdös の結果の成立は期待できない. だが, 零エネルギー状態密度のある強結合極限がどうなるかを見るのは興味がある. これについては [7] を参照.

5.3 量子群との関係

A_2+iA_1 が, $\{n\omega_1+im\omega_2\}_{n,m\in Z}$ ($\omega_1,\omega_2>0$ は定数) に特異点をもつ, ヴァイエルシュトラス (Weierstrass) の ζ 関数であるとき（この場合, 特異点の数は無限個), $X=e^{i\omega_1\bar{P}_1}$, $Y=e^{i\omega_2\bar{P}_2}$ とすれば, $e^{2\pi iq}XY=YX$ が成立する[26]. したがって, これは, $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上での, **量子平面** (quantum plane) の表現をあたえる[27]. この事実を用いると, $L^2(\boldsymbol{R}^2)$ 上に, 量子群 $U_q(sl_2)$ の表現を構成できる. この表現は, 最高ウェイトベクトルをもたない, 無限次元表現である. 詳細については, [8] を参照.

参考文献

[1] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.*, **115** (1959), 485 − 491.

---

26) 特異点の数 N が無限である場合に対しても, これまでの考察は自然に拡張される.
27) 量子平面や量子群については, たとえば, [20] を参照.

[2] Y. Aharonov and A. Casher, Ground state of a spin $-\frac{1}{2}$ charged particle in a two-dimensional magnetic field, *Phys. Rev. A* **19** (1979), 2461 − 2462.

[3] I. J. R. エイスチン（藤井昭彦 訳），ゲージ場入門，講談社，1985.

[4] A. Arai, Momentum operators with gauge potentials, local quantization of magnetic flux, and representation of canonical commutation relations, *J. Math. Phys.* **33** (1992), 3374 − 3378.

[5] A. Arai, Properties of the Dirac-Weyl operator with a strongly singular gauge potential, *J. Math. Phys.* **34** (1993), 915 − 935.

[6] A. Arai, Gauge theory on a non-simply conneted domain and representations of canonical commutation relations, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 2569 − 2580.

[7] A. Arai, Representation of canonical commutation relations in a gauge theory, the Aharonov-Bohm effect, and the Dirac-Weyl operator, *J. Nonlinear Math. Phys.* **2** (1995), 247 − 262.

[8] A. Arai, Canonical commutation relations in a gauge theory, the Weierstrass Zeta-function, and infinite dimensional Hilbert space representations of the quantum group $U_q(sl_2)$, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 4203 − 4218.

[9] 新井朝雄，正準交換関係とAharonov-Bohm効果，数理物理94（学習院大学，1994年9月22日～25日），予稿集.

[10] 新井朝雄，対称性の数理，日本評論社，1993.

[11] 新井朝雄，マクスウェル方程式からゲージ場の方程式へ，数学セミナー（1995），10月号，27 − 31.

[12] G. Dorfmeister and J. Dorfmeister, Classification of certain pairs of operators (P, Q) satisfying $[P, Q] = -i$, Id, *J. Funct. Anal.* **57** (1984), 301 − 328.

[13] L. Erdös, Ground-state density of the Pauli operator in the large field limit, *Lett. Math. Phys.* **29** (1993), 219 − 240.

[14] 江沢 洋・恒藤敏彦 編，量子物理学の展望 上，岩波書店，1978.

[15] 江沢 洋，量子力学の構造，岩波講座 現代物理学の基礎［第2版］4『量子力学II』，岩波書店，1978.

[16] B. Fuglede, On the relation $PQ - QP = -iI$, *Math. Scand.* **20** (1967), 79 − 88.

[17] M. Göckler and T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[18] G. A. Goldin, R. Menikoff and D. H. Sharp, Representations of a local current algebra in nonsimply connected space and the Aharonov-Bohm

effect, *J. Math. Phys.* **22** (1981), 1664 − 1668.

[19] M. Hirokawa, Canonical commutation relations. Heisenberg's or Weyl's? in the light of the AB effect, preprint, 1995.

[20] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, New York, 1995.

[21] 小林昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.

[22] H. Kurose and H. Nakazato, Geometric construction of ∗-representation of the Weyl algebra with degree 2, preprint, 1994.

[23] 黒田成俊, スペクトル理論 II, (岩波講座 基礎数学 解析学 (II) xi), 岩波書店, 1979.

[24] 黒田成俊, 量子物理の数理, (岩波講座 応用数学), 岩波書店, 1994.

[25] C. Magni and F. Valz-Gris, Can elementary quantum mechanics explain the Aharonov-Bohm effect? *J. Math. Phys.* **36** (1995), 177 − 186.

[26] 茂木 勇・伊藤光弘, 微分幾何学とゲージ理論, 共立出版, 1986.

[27] E. Nelson, Analytic vectors, *Ann. of Math.* **70** (1959), 572 − 615.

[28] J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Ann.* **104** (1931), 570 − 578.

[29] J. von Neumann, *Die mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932 (邦訳:『量子力学の数学的基礎』(井上 健 他共訳), みすず書房, 1957).

[30] 日本物理学会編, 量子力学と新技術, 培風館, 1987.

[31] 大貫義郎, アハラノフ-ボーム効果, 物理学最前線 9 (1985), 1 − 64, 共立出版.

[32] C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators*, Springer, Berlin, 1967.

[33] M. Reed and B. Simon, *Mehtods of Modern Mathematical Physics Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.

[34] H. Reeh, A remark concerning canonical commutation relations, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 1535 − 1536.

[35] N. M. Ruijsenaars, The Aharonov-Bohm effect and scattering theory, *Ann. of Phys.* **146** (1983), 1 − 34.

[36] K. Schmüdgen, On the Heisenberg commutation relation. I, *J. Funct. Anal.* **50** (1983), 8 − 49.

[37] K. Schmüdgen, On the Heisenberg commutation relation. II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983), 601 − 671.

[38] K. Schmüdgen, *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*, Birkhäuser, Basel, 1990.

[39] 高林武彦, 量子論の発展史, 中央公論社, 1977.

[40]　外村 彰，　電子波で見る世界，丸善，1985.

[41]　外村 彰，　量子力学を見る，岩波書店，1995.

[42]　吉田耕作・伊藤清三 編，函数解析と微分方程式，（現代数学演習叢書 4），岩波書店，1976.

編者　荒木不二洋（あらき・ふじひろ）——東京理科大学理工学部数学教室

著者　新井朝雄（あらい・あさお）——北海道大学理学部数学教室
川合　光（かわい・ひかる）——高エネルギー物理学研究所理論部
丹羽敏雄（にわ・としお）——津田塾大学学芸学部数学教室
深谷賢治（ふかや・けんじ）——京都大学理学部数学教室
松下　貢（まつした・みつぐ）——中央大学理工学部物理学教室
満渕俊樹（まぶち・としき）——大阪大学理学部数学教室
矢吹治一（やぶき・はるいち）——兵庫教育大学自然系数学教室

数理物理への誘い 2 ——最新の動向をめぐって

1997年2月7日　第1版第1刷発行

定価はカバーに
表示しています

編　者　荒木不二洋
発行者　西原昌幸
発行所　遊星社
〒164 東京都中野区中野3－50－1
電話（03）3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星雲社
〒112 東京都文京区小石川5－19－25
電話（03）3947-1021　FAX（03）3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN4-7952-6883-5